

Matematické vzdělávání pro 21. století rozvíjí kreativitu a komunikační dovednosti

Kvalitní matematické vzdělávání nemá podle OECD rozvíjet jen talent budoucích matematiků, vědců a inženýrů, ale může zlepšovat kreativitu, kritické myšlení, komunikační schopnosti, týmovou práci a sebedůvěru celé populace žáků.

Řešení problémů je jádrem veškerého matematického vzdělávání. Řešení komplexních, neznámých a nerutinních problémů (CUN – complex, unfamiliar and non-routine problems) musí být základním kamenem efektivního matematického vzdělávání pro 21. století. Zatímco žáci řešící rutinní problémy se mohou spoléhat na memorování, řešení CUN problémů vyžaduje matematické dovednosti, které zahrnují nejen logiku a dedukci, ale také intuici, smysl pro čísla a vyvozování závěrů. Inovativní společnosti totiž vyžadují kreativitu v matematice stejně jako v jiných oblastech. Změnil se také přístup k matematické komunikaci – žáci všech věkových skupin jsou vedeni k tomu, aby se zapojovali do matematických diskusí, sdíleli nápady a řešení a vysvětlovali své vlastní myšlení. Rozvíjení těchto kompetencí může vést ke zlepšení tzv. měkkých dovedností, jakož i matematické gramotnosti občanů.

Ačkoli se řešení problémů v matematice vyučovalo již od časů starých Řeků, ne-li dříve, pojetí řešení problémů se dramaticky změnilo v posledním desetiletí. V minulosti se „řešení problémů“ týkalo zejména aplikace hotových algoritmů při řešení rutinních cvičení a slovních úloh. Nyní, podle Programu pro mezinárodní testování studentů (PISA), vytvořeného OECD, jenž hodnotí matematické dovednosti pro 21. století, by se mělo zaměřit na „schopnost žáků analyzovat, zdůvodňovat a efektivně komunikovat, když formulují, řeší a interpretují matematické problémy v rozmanitých situacích týkajících se kvantitativní, prostorové, pravděpodobnostní nebo jiné matematické oblasti“ (OECD, 2004, s. 37)¹. Žáci musejí být „matematicky gramotní“ – je třeba, aby „disponovali matematickými znalostmi a chápáním, aplikovali znalosti a dovednosti v klíčových matematických oblastech ... a aktivovali své matematické kompetence k řešení problémů, s nimiž se setkávají v životě“ (OECD, 2004, s. 37; viz také OECD, 2013)².

Pojem „řešení problémů“ má dvě složky: typ problému, který má být vyřešen, a znalosti a dovednosti potřebné k jeho vyřešení. Tradiční typy matematických úloh obsahují aritmetické výpočty, určité rovnice, geometrické úlohy a „rutinní“ slovní úlohy, které se obvykle skládají ze dvou nebo tří vět obsahujících matematickou informaci a otázku, která žáky vede k vytvoření vhodné

rovnice pro vyřešení úlohy. V geometrii se studenti seznámují s vlastnostmi tvarů a poučkami o nich (OECD, 2004). Všechny potřebné informace jsou přitom obvykle uvedeny v zadání úlohy – žáci mají aplikovat poučky a tímto způsobem je ověřit.

Dovednosti potřebné k řešení těchto typů úloh jsou limitované a jejich osvojování se obvykle skládá z předvedení vhodné techniky, po němž následuje procvičování řady podobných úloh (např. Schoenfeld, 1992)³. Navzdory tomu, že je rozvoj matematického myšlení jedním z hlavních cílů výuky matematiky, Yan a Li-anghuo (2006)⁴ zjistili, že většina úloh v učebnicích matematiky zastupuje tyto rutinní problémy, kde je obvykle zřejmé, jaká matematika je vyžadována. Důsledkem toho řada žáků připouští, že memorování je nejdůležitější dovedností, kterou potřebují k úspěchu při hodinách matematiky (Schoenfeld, 1992).

Úkoly pro zítřejší svět

V kontrastu s těmito tradičními matematickými problémy se typ matematických úloh vhodných pro 21. století liší nejen v obsahu, pojetí a kontextu, v němž jsou zadávány, ale také v postupech potřebných k jejich vyřešení. Obsah těchto problémů podle PISA (OECD, 2004, 2013, 2014⁵) nastiňuje matematické myšlenky, kontext často spojuje matematické úlohy s autentickými situacemi ze života (od osobních k veřejným a vědeckým situacím) a jejich pojetí je komplexnější než u tradičních matematických problémů. Úlohy mohou obsahovat matematické informace, které nejsou vždy přímo vyjádřené, a mohou mít také více správných odpovědí. Tyto úkoly „pro zítřejší svět“ se mohou skládat z celého odstavce textu, v němž je obsažena matematická informace. Žáci jsou vyzváni k tomu, aby udělali rozhodnutí založené na jejich matematických znalostech a postupech, které provádějí. Úkoly často obsahují různé druhy obrazného znázornění a někdy také žádají, aby žáci vyhledávali dodatečné informace s využitím počítače nebo jiných zdrojů. Tyto výpočetní úlohy se mohou od tradičních lišit i v tom, že po žácích požadují nejen provedení výpočtů, ale také vysvětlení jejich uvažování a popis řešení problému. Žáci jsou také často vyzváni, aby zadaný úkol řešili různými způsoby, navrhli kreativní po-

stupy řešení, zvážili a kriticky zhodnotili své vlastní řešení a řešení ostatních. Jmenované typy úkolů jsou typickou součástí testování PISA 2012 (OECD, 2014).

Smyslem tohoto přehledu není říci, že by rutinní cvičení a úkoly měly být vyřazeny z kurikula. Řešení rutinních problémů je nezbytné pro procvičování, dokonalé zvládnutí početních úkonů a schopnost reagovat automaticky. Matematické vzdělávání by ale současně mělo jít nad rámec rutinních úkolů a zahrnovat inovativní problémy, které jsou komplexní, neznámé a nerutinní (CUN).

Různé typy úkolů přirozeně vyžadují různé typy postupů a dovedností pro řešení. Pokud úkoly vycházejí z kontextu skutečného světa, žáci musejí nejprve rozpoznat, o čem problém je a jaké matematické znalosti je třeba aktivovat pro jeho vyřešení. Aby to mohli udělat, je nezbytné, aby propojili své znalosti s informacemi poskytnutými v úloze. Potom musejí řešitelé postupně navrhnout strategie pro „transformování problému do takové podoby, na niž lze uplatnit přímé matematické řešení“ (OECD, 2004). Závěrečné kroky zahrnují určitou formu reflexe výsledku, jeho úplnosti a platnosti pro daný případ (OECD, 2004, 2013, 2014).

Následující tabulka obsahuje tři příklady se stejným kontextem (nakupování a prodávání). První úloha je velmi otevřená, má více správných řešení závisících na souboru předpokladů a informací, které si žáci k jejímu řešení vyberou. Úloha s pizzou je také otevřená, obsahuje ale specifické informace. Třetí příklad představuje rutinní úlohu.

Příklady CUN, autentických a rutinních úkolů

Úloha se supermarketem – příklad CUN úlohy

Několik supermarketů před prázdninami inzerovalo, že jsou nejlevnějším supermarketem ve městě. Vyhledejte potřebné informace a zjistěte, který z reklamních materiálů má pravdu.

Úloha s pizzou – příklad autentické úlohy

	Cena pizzy eur	Průměr cm	Cena přílohy eur
PIZZA BOOM			
Osobní pizza	3.50	15	4.00
Malá	3.50	15	4.00
Střední	6.50	23	7.75
Velká	12.50	38	14.45
Extra velká	15.50	45	17.75
SUPER PIZZA			
Malá	8.65	30	9.95
Střední	9.65	35	10.95
Velká	11.65	40	12.95
MC PIZZA			
Malá	6.95	25	1.00
Velká	9.95	35	1.25

Tvoji spolužáci organizují party. Škola poskytne nealkoholické nápoje, tvým úkolem je objednat pizzy. Třídní rozpočet činí 85.00 eur. Samozřejmě chceš koupit tolik pizz, kolik můžeš. Máš k dispozici jídelní lístek

tří místních pizza restaurací. Porovnej ceny a navrhní třídnímu pokladníkovi nejlevnější nabídku. Napiš pokladníkovi zprávu, v níž svůj návrh odůvodníš.

Prodej – příklad rutinní úlohy

V supermarketu A stojí 1 kg masa 8 eur a 1 kg drůbeže 4 eura. V supermarketu B stojí 1 kg masa 7 eur a 1 kg drůbeže 5 eur. Pan Jonson chce koupit 3 kg masa a 2 kg drůbeže. Který supermarket je levnější?

Nové typy matematických úloh, které jsou komplexní, neznámé a nerutinní (CUN) a přesahují tradiční způsoby řešení problémů, jsou lépe přizpůsobeny přípravě žáků na autentické využití matematiky. Tyto typy problémů se vztahují jak na formální situace, tak na situace z reálného života, jsou propojené s předchozími znalostmi a zkušenostmi, obsahují různá znázornění a vzory logických úsudků, mají jedno nebo více správných řešení a pobízejí k reflexi na všech úrovních řešení problému. Řešení CUN úloh je založeno na tradičních znalostech a dovednostech, ale vyžaduje také dodatečný, nadřazený soubor dovedností.

Význam matematického uvažování

Usuzování odkazuje na schopnost dávat věcem smysl, zjišťovat a ověřovat fakta a změnit nebo odůvodnit postupy a představy. Matematické uvažování zahrnuje důkazy, logiku, příčinu a následek, deduktivní myšlení, induktivní myšlení a vyvozování závěrů. Matematické uvažování je tudíž založeno na schopnosti reflektovat řešení, aplikovat úsudek a na schopnosti jasně vyjádřit vlastní matematické myšlení. Matematické uvažování také často zahrnuje intuici, smysl pro čísla a logický úsudek (Steen, 1999)⁶.

Zlepšování matematického uvažování je nedílnou součástí primárních a sekundárních školních standardů popsaných Národní radou učitelů matematiky (NCTM, 2000)⁷ a dalšími, jako například Rámcem matematického kurikula v New Jersey (Matematická koalice v New Jersey a Ministerstvo školství státu New Jersey, 1996)⁸. Je také v souladu s definicí matematické gramotnosti PISA (OECD, 2004, 2012). Pro ilustraci, rámec matematického kurikula v New Jersey (*New Jersey Mathematics Curriculum Framework* – NJMCF) uvádí:

Všichni žáci budou rozvíjet schopnost uvažování a stanou se samostatnými, nezávislémi „matematickými mysliteli“... Matematické uvažování je kritická dovednost, která žákům umožňuje používat všechny další matematické dovednosti. S rozvojem matematického uvažování žáci poznávají, že matematika má smysl a může být pochopena. Učí se, jak vyhodnotit situace, vybrat strategie řešení problému, navrhnout logické závěry, nacházet a popisovat řešení a rozpoznat, jak mohou být řešení aplikována. „Matematictí myslitelé“ jsou schopni reflektovat řešení problémů a určit, zda dávají či nedá-

vají smysl. Uvědomují si všudypřítomné využití uvažování a jeho sílu. Žáci musejí umět posoudit správnost svých odpovědí; musejí být schopni aplikovat matematické uvažování v dalších předmětech a ve svém každodenním životě. Musejí rozpoznat, že matematické uvažování může být použito v různých situacích, aby jim pomohlo rozhodnout se a dospět k řešení. (Matematická koalice v New Jersey a Ministerstvo školství státu New Jersey, 1996, s. 1).

Matematická kreativita a objevování problémů

Podstatou matematiky je řešení problémů, které je často spojováno s „technickými dovednostmi“ oboru a „vědním jak“. V inovativních společnostech je zásadně důležitá schopnost nacházet „jiný pohled na věc“: vytvářet originální nápady a spojení mezi různými objekty, přístupy nebo disciplínami. Pod pojem matematická kreativita někdy zařazujeme také objevování nebo nastolování problémů s odkazem na širokou škálu kompetencí od formulování otázky nebo otázek vztahených k zadanému matematickému textu až po objevení inovativních problémů.

V hodinách matematiky se objevování problémů obvykle využívá jako prostředek k usnadnění řešení úkolů. Během učení se, jak řešit konkrétní typ úlohy, žáci procvičují také objevování problémů, které může být na druhou stranu mnohem náročnější než samotné řešení problémů. Vlastní definice objevování problémů souvisí s kreativitou, která je spojena také s hledáním alternativních řešení, rozpoznáním inovativních problémů nebo zvážení definicí problémů (Silver, 1997⁹; Csikszentmihalyi, 1996¹⁰).

Objevování problémů studenty bylo obsáhle vyzkoušeno v hodinách matematiky (vynikající přehled podává Silver, 1997). Žáci bývají vyzváni k tomu, aby pro otevřené úlohy navrhli více správných řešení, nebo jsou vedeni k navrhování různých strategií pro řešení zadaného úkolu. Prodiskutování a vyhodnocení řešení prezentovaných spolužáky může vést žáky k předložení více řešení, hledání různých druhů metod a navržení neobvyklých řešení.

Úloha s pizzou uvedená v tabulce ilustruje, jak může být v hodině matematiky rozvíjena kreativita. Aby byl úkol splněn, je možné využít rozmanité interpretace. Žáci se musejí rozhodnout, které položky do analýzy zahrnou, a přitom zohlednit jejich množství a cenu. Podobné postupy se používají také při řešení úlohy se supermarketem. Žák, který do analýzy zahrne jen potraviny, může získat odlišnou odpověď než jeho spolužák, který analyzuje vzorek všech věcí nebo položky, které se častěji prodávají. Tyto úkoly nemají jedinou správnou odpověď a různé odpovědi závisí na jejich základní interpretaci. Uvedené druhy úkolů mohou být zadávány

na různých vzdělávacích úrovních v závislosti na matematických znalostech a kompetencích žáků.

Podle OECD představuje kreativní myšlení „kognitivní aktivitu, která vede k nacházení řešení nových problémů. Kritické myšlení doprovází kreativní myšlení a je uplatňováno při vyhodnocování možných řešení“ (OECD, 2012; s. 13). CUN problémy mohou pomoci rozvíjet některé z těchto aspektů myšlení a kreativity. Zároveň žákům umožňují vyrovnat se s nejistotou a nutností dělat rozhodnutí.

Přínosy komunikace v hodinách matematiky

Komunikace v matematice se týká čtení, psaní a mluvení o matematice. Někdy jsou všechny tři kompetence propojeny dohromady pod pojmem „matematický diskurs“.

Základní přístup ke komunikaci v hodinách matematiky se změnil v závěru 90. let a na začátku nového století. Předtím se učitelé domnívali, že jejich hlavní rolí je šířit znalosti, fakta a algoritmy, a od žáků obvykle očekávali, že je budou opakovat (Brooks a Brooks, 1993)¹¹. Komunikaci v hodinách matematiky přitom vedli hlavně učitelé. On nebo ona byli tím jediným, kdo „mluví“ matematicky, přináší žákům nové matematické myšlenky s využitím „matematického jazyka“ a vysvětluje matematické symboly a termíny tak, aby mohly být využity k řešení problémů. Za těchto okolností většina učitelů spoléhala hlavně na učebnice (Ben-Peretz, 1990)¹² a žáci pracovali individuálně, aby nové postupy a algoritmy zvládli. Vzhledem k tomu, že učebnice obsahovaly především rutinní úkoly (Yan a Lianghuo, 2006) a žáci na nich individuálně pracovali, byl zde malý prostor pro vedení žáků k diskusi, vysvětlování nebo pro jejich zapojení do jakékoliv formy matematického diskursu.

Změna v obsahu, postupech a kontextu matematického vzdělávání pro 21. století přirozeně vedla (nebo měla vést) ke změně základního přístupu k matematické komunikaci ve třídě. Když jsou žáci postaveni před CUN problémy, je nevyhnutelné, aby společně sdíleli nápady, diskutovali o řešení úkolů a vysvětlovali vlastní myšlení. Ať už jde o písemnou nebo ústní komunikaci, žáci se musejí vyjadřovat jasně, přesvědčivě a přesně. Light a Mevarech (1992)¹³ ukázali, že vzájemná argumentace je efektivním prostředkem pro dosažení kognitivní změny, neboť vysvětlování a poslouchání nápadů ostatních poskytuje žákům příležitost podívat se na řešení různými pohledy. Navíc reflektuje nejen jejich vlastní řešení, ale také řešení ostatních. Webb (1989)¹⁴ v sérii studií ukázal, že během vzájemné argumentace mají z diskursu sice prospěch všichni jeho účastníci, ale ten, kdo vysvětlení podává, z toho profituje ještě více než ti, kteří poslouchají. Matematická komunikace může také pomáhat při objevování chyb a mylných názorů, které by jinak zůstaly

skryté. Žáci někdy udělají dvě chyby, které se navzájem vyruší, a získají tím správnou odpověď. Přitom pouze pomocí matematické komunikace je možné tyto chyby odhalit.

Matematická komunikace zlepšuje i sociální dovednosti
Význam matematické komunikace se neomezuje jen na starší studenty. Národní rada učitelů matematiky (*National Council of Teachers – NCTM*) ve Spojených státech vysvětluje, že matematická komunikace musí začít v útlém věku a pokračovat od mateřské školy až do konce střední a vysoké školy. Podle komunikačních standardů NCTM (2000, s. 59) by žáci měli umět:

- utřídit a sjednotit své matematické myšlení prostřednictvím komunikace;
- vyjádřit své matematické myšlení souvisle a jasně směrem k vrstevníkům, učitelům a ostatním;
- analyzovat a vyhodnotit své matematické myšlení a strategie ostatních;
- používat jazyk matematiky k přesnému vyjádření matematických pojmů.

NCTM není jediným institutem, který zdůrazňuje význam komunikace v hodinách matematiky. Rámec PISA například opakovaně uvádí, jak je důležité, aby žáci své matematické uvažování odůvodňovali. Podle OECD jsou komunikační kompetence vyžadovány na všech úrovních až do nejvyšší úrovně, v níž „žáci dokážou přesně popsat své kroky a uvažování týkající se jejich zjištění, interpretaci a argumentů“ (OECD, 2004, s. 55).

Význam komunikace pro řešení CUN problémů dokládá, že matematická komunikace zlepšuje také některé aspekty sociálních dovedností, které jsou velmi důležité v reálném životě. Podle OECD (2004) zahrnuje pojem sociální dovednosti schopnost: 1) vytvářet, udržovat a organizovat vztahy s ostatními; 2) spolupracovat s ostatními při týmové práci, sdílet zodpovědnost, vést a podporovat ostatní; 3) zvládat a řešit problémy nebo konflikty, které vznikají ve skupině kvůli rozdílným potřebám, zájmům, cílům nebo hodnotám.

Komunikace je důležitou součástí sociálních dovedností, neboť spolupráce s ostatními vyžaduje schopnost souvisle prezentovat vlastní myšlenky a naslouchat ostatním, dávat a přijímat konstruktivní zpětnou vazbu, chápat dynamiku diskusí, schopnost vyjednávat a někdy se také vzdát. Při řešení konfliktů je třeba zvážit zájmy a potřeby sebe sama a ostatních a hledat řešení, z nichž budou profitovat obě strany. Vedlejším produktem zlepšení matematického uvažování a komunikace tedy může být rozvoj sociálních dovedností, což je sám o sobě důležitý výsledek.

Přeložila Alena Nová

¹OECD (2004), *The PISA 2003 Assessment Framework: Mathematics, Reading, Science and Problem Solving Knowledge and Skills, Education and Skills, PISA, OECD Publishing, Paris*, http://www.oecd-ilibrary.org/education/the-pisa-2003-assessment-framework_9789264101739-en

²OECD (2013), *PISA 2012 Assessment and Analytical Framework: Mathematics, Reading, Science, Problem Solving and Financial Literacy, OECD Publishing*.

http://www.oecd-ilibrary.org/education/pisa-2012-assessment-and-analytical-framework_9789264190511-en

³Schoenfeld, A. H. (1992), “Learning to think mathematically: Problem solving metacognition, and sense-making in mathematics”, in D. A. Grouws, (ed.), *Handbook for Research on Mathematics Teaching, MacMillan Publishing, New York*, s. 334–370.

⁴Yan, Z. and F. Lianghuo (2006), “Focus on the representation of problem types in intended curriculum: A comparison of selected mathematics textbooks from mainland China and the United States”, *International Journal of Science and Mathematics Education, Vol. 4(4)*, s. 609–629.

⁵OECD (2014), *PISA 2012 Results: Creative Problem Solving: Students’ Skills in Tackling Real-Life Problems (Volume V), PISA, OECD Publishing*.

http://www.oecd-ilibrary.org/education/pisa-2012-results-skills-for-life-volume-v_9789264208070-en

⁶Steen, G. J. (1999), “Genres of discourse and the definition of literature”, *Discourse Processes, Vol. 28(2)*, s. 109–120.

⁷NCTM (National Council of Teachers of Mathematics) (2000), *Principles and Standards for School Mathematics, NCTM, Reston, VA*.

⁸New Jersey Mathematics Coalition and the New Jersey Department of Education (1996), *New Jersey Mathematics Curriculum Framework, The first four standards, standard 4-reasoning, K-12 overview, State of New Jersey Department of Education*.

⁹Silver, E. A. (1997), “Fostering creativity through instruction rich in mathematical problem solving and problem posing”, *ZDM International Journal on Mathematics Education, Vol. 29(3)*, s. 75–80.

¹⁰Csikszentmihalyi, M. (1996), *Creativity: Flow and the Psychology of Discovery and Invention, Harper Perennial, New York*.

¹¹Brooks, J. G. and M. G. Brooks (1993), *In Search of Understanding: The Case for Constructivist Classrooms, Association for Supervision and Curriculum Development, Alexandria, VA*.

¹²Ben-Peretz, M. (1990), *The Teacher-Curriculum Encounter: Freeing Teachers from the Tyranny of Text, The State University of New York Press, Albany*.

¹³Light, P. H. and Z. R. Mevarech (1992), “Cooperative learning with computers: An introduction”, *Learning and Instruction, Vol. 2(3)*, s. 155–159.

¹⁴Webb, N. M. (1989), “Peer interaction and learning in small groups”, *International Journal of Educational Research, Vol. 13(1)*, s. 21–39.

Pramen: Mevarech, Z. and B. Kramarski (2014), Critical Maths for Innovative Societies: The Role of Metacognitive Pedagogies, OECD Publishing.

http://www.oecd-ilibrary.org/education/critical-maths-for-innovative-societies_9789264223561-en