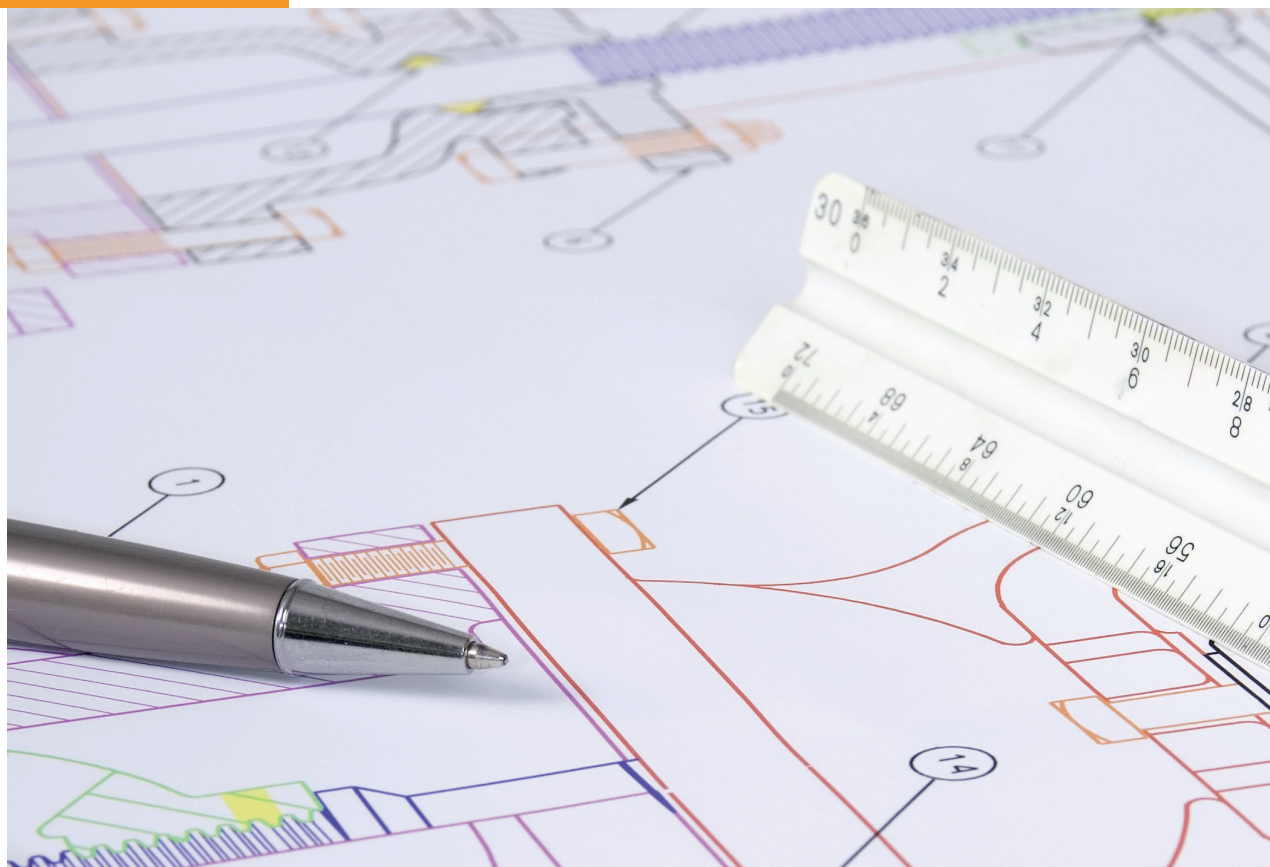




**Sbírka řešených úloh z aplikované
matematiky pro střední školy
pro technické obory
se strojírenským základem**

Sbírka řešených úloh z aplikované matematiky pro střední školy pro technické obory se strojírenským základem

Autorský kolektiv: Miroslav Bartošek,
František Procházka, Miroslav Staněk,
Josef Bobek, Zuzana Bobková

Sbírka řešených úloh z aplikované matematiky pro střední školy pro technické obory se strojírenským základem

Autorský kolektiv:

Miroslav Bartošek, František Procházka, Miroslav Staněk, Josef Bobek, Zuzana Bobková

Vydal Národní ústav pro vzdělávání, školské poradenské zařízení a zařízení pro další vzdělávání pedagogických pracovníků, Weilova 1271/6, Praha 10 – Hostivař, PSČ 102 00.

Rok vydání: 2018

První vydání

ISBN: 978-80-7481-221-7

Obsah

Úvod	3
1 Aritmetika (Operace s čísly)	5
2 Finanční matematika	13
3 Algebra (Výrazy s proměnnými)	18
4 Funkce	25
5 Rovnice a nerovnice	32
6 Planimetrie	39
7 Stereometrie	49
8 Analytická geometrie v rovině	53
9 Posloupnosti	56
10 Kombinatorika	58
11 Pravděpodobnost	68
12 Statistika a práce s daty	76
13 Seznam tabulek, grafů a obrázků	83
13.1 Seznam tabulek	83
13.2 Seznam grafů	83
13.3 Seznam obrázků	84
14 Použité zdroje	85
14.1 Tištěné dokumenty	85
14.2 Elektronické dokumenty	85

Úvod

Tato sbírka je součástí materiálů vydaných NÚV k podpoře výuky matematiky na středních a vyšších odborných školách. Nenahrazuje, jen doplňuje existující sbírky úloh z matematiky používané ve výuce matematiky na středních školách, lze ji použít i na vyšších odborných školách. Volbou tematiky propojuje učivo odborných předmětů a matematiky podle RVP pro technické obory se strojírenským základem. Vhodně volené úlohy umožňují ukázat učitelům význam a možnosti uplatnění probíraného učiva při řešení úloh v odborných předmětech a v praxi. Metodicky zpracovaná řešení vybraných úloh umožňují i učitelům matematiky bez technického vzdělání vysvětlit žákům podstatu úloh a jejich matematická řešení. Rovněž učitelům odborných předmětů umožňuje sbírka poznat metody a způsoby matematického řešení úloh, které uplatňují při výuce odborných předmětů. Žáci mohou úlohy, zejména ty řešené, využít k vlastnímu studiu a procvičování. Úlohy lze využít i v návaznosti na miniprojekty z matematiky, jejichž metodiku již NÚV na svých stránkách publikoval.¹

Sbírka je členěna podle obvyklého učiva matematiky v RVP pro technické obory se strojírenským základem. Úlohy svým zaměřením a různou obtížností umožní využití v oborech E, H, M/L0, L5 i na vyšších odborných školách, obtížnost úloh jsme však neoznačili, neboť naše zkušenosti ukazují, že obtížnost úlohy je mnohdy subjektivní záležitostí. O zařazení konkrétní úlohy do výuky rozhodne učitel na základě svých zkušeností a znalostí žáků.

U úloh je uveden výsledek řešení, u vybraných úloh je uveden i postup řešení.

Sbírka je sestavena z vlastních úloh a výběru úloh ze starších, nyní již hůře dostupných publikací, které jsme někdy aktualizovali tak, že je lze dobře využít i v současnosti. U některých úloh jsme ponechali text v původní verzi, i když z hlediska terminologie užívané ve škole není úloha precizně formulována, neboť i s tím se žák i učitel běžně v odborné praxi setká. U těchto úloh si musí řešitel z kontextu úlohy text upravit nebo doplnit tak, aby mohl úlohu vyřešit prostředky známými z matematiky. I to je důležitá etapa při řešení úloh z praxe matematickými prostředky/metodami. U takových úloh ukazuje popis řešení, jak v takovém případě postupovat.

Na webových stránkách NÚV <http://www.nuv.cz/t/opatreni-metodika> je pro učitele i ostatní zájemce zřízena konzultační služba. Sbírkou jsme připravili ve snaze co nejdříve pomoci

¹ viz http://www.nuv.cz/uploads/projekty_Aplikovane_ulohy_v_matematice.pdf

učitelům při uplatňování aplikací matematiky a při řešení úloh se vztahem k oboru vzdělání, zde strojírenství. Nepovažujeme ji za uzavřené dílo, naopak předpokládáme, že ji budeme doplňovat a přizpůsobovat na základě zkušeností uživatelů a vývoje výuky matematiky v SOV. Rádi přivítáme informace o zkušenostech s využitím sbírky i návrhy na úpravy a doplnění úloh, zejména v souvislosti s vývojem výuky a oborů vzdělání.

V Praze 24. 7. 2018

Za autorský kolektiv:

Miroslav Bartošek, František Procházka, Miroslav Staněk, Zuzana Bobková

1 Aritmetika (Operace s čísly)

1. Ze skladu se vydalo 895 šroubů a ještě jich tam zůstalo 2 763. Vypočítejte, kolik šroubů bylo původně ve skladě?

Řešení:

3 658 ks

2. Ve skladu měli ráno 359 kg zinku. Během dne vydali dopoledne nejdříve 47 kg a odpoledne 38 kg zinku. Kolik zinku ve skladu zůstalo?

Řešení:

274 kg

3. Při vizuální kontrole svaru u 250 svařených trubek bylo zjištěno, že jen $\frac{4}{5}$ trubek mají dobrý svar. Při následné tlakové zkoušce z nich byla vyřazena $\frac{1}{10}$. Kolik trubek bylo vhodných pro použití?

Řešení:

180

4. Obdélník o rozměrech 112 cm a 98 cm rozdělte na stejné čtverce, jejichž délky stran jsou dány celými čísly. Určete počet čtverců a délky jejich stran.

Řešení:

Protože $D(112, 98) = 14$, je délka strany čtverce je 14 cm, počet čtverců je potom 56. Délka strany čtverce může být ještě 2 cm nebo 7 cm. Při délce 2 cm je počet čtverců 504; při délce strany čtverce 7 cm je počet čtverců 224.

5. V dílně je pracovní doba od 6:00 do 14:30 hodin. Zaměstnanec dílny začal frézovat litinovou desku v 11 hodin 40 minut a práci dokončil následující den v 9 hodin 20 minut. Jak dlouho frézoval desku?

Řešení:

6 hodin 10 minut

6. V podzemí dolu je položeno 15 km 500 m kolejnic. Jeden metr kolejnice má hmotnost 23 kg. Určete hmotnost kolejnic položených v podzemí tohoto dolu.

Řešení:

$$15\,500 \cdot 23 \text{ kg} = 356\,500 \text{ kg} = 356,5 \text{ t}$$

7. Vylisování jedné matice trvá přibližně tři sekundy. Kolik by se jich vylisovalo za 6 hodin při nepřetržité práci?

Řešení:

$$6 \text{ hodin} = 21\,600 \text{ s, vylisovalo by se } 7\,200 \text{ matic}$$

8. Jak dlouho potrvá soustružení válcové plochy 2,5 m dlouhé při posuvu 0,6 mm na 1 otáčku, koná-li obrobek 75 otáček za minutu?

Řešení:

$$\text{Za 1 minutu délka } 45 \text{ mm, celková doba soustružení } 55 \frac{5}{9} \text{ min.}$$

9. Hoblovací stroj koná 8 zdvihů za minutu a zabírá třísku 1,2 mm širokou. Jak dlouho potrvá hoblování plochy široké 450 mm?

Řešení:

$$\text{Za 1 minutu tříska } 9,6 \text{ mm, } 450 \text{ mm trvá } 46 \frac{7}{8} \text{ min.}$$

10. Obráběním ocelového odlitku se získá obrobek s hmotností 162 kg. Jaká byla hmotnost odlitku, ztrácí-li se při obrábění $\frac{1}{4}$ obrobku?

Řešení:

$$216 \text{ kg}$$

11. V litinové desce dlouhé 0,72 m se má vyfrézovat drážka. Posuv frézy na 1 otáčku je 0,3 mm. Vypočítejte:

- a) Kolik otáček frézy bude zapotřebí, připočítáme-li k délce desky délku náběhu frézy, která činí 24 mm?
- b) Jak dlouho potrvá frézování, koná-li fréza 75 otáček za minutu?

Řešení:

- a) 2 480
- b) $33 \frac{1}{15}$ minuty

12. Máme hoblovat ocel pevnosti 700 MPa upichovacím nožem z uhlíkové nástrojové oceli; posuv $s = 0,2 \text{ mm}$ na dvojzdvih, hloubka řezu $t = 3 \text{ mm}$. V tabulkách jsme zjistili, že hospodárná rychlost nože je 21 m/minutu. Pro zadanou pevnost oceli musíme násobit

hospodárnou rychlost koeficientem 0,84. Pro zadaný typ nože násobíme rychlost ještě koeficientem 0,7. Jakou výslednou hospodárnou rychlostí budeme řezat?

Řešení:

$$v = 21 \cdot 0,84 \cdot 0,7 = 12,35, \text{ tzn. } 12,35 \text{ m/min}$$

13. Vřeteno soustruhu koná 400 otáček za minutu a podélný posuv za 1 otáčku je 0,4 mm. Kolik času je třeba na soustružení dvou součástek dlouhých 1 279,4 mm a 320 mm, jestliže na upnutí každé součástky je potřebná doba 3 minuty?

Řešení:

Na první součástce vykoná soustruh 3 198,5 otáčky, u druhé součástky 800 otáček, celkem vykoná 3 998,5 otáčky. Jestliže za 1 minutu vykoná 400 otáček, potom 3 998,5 otáčky vykoná za 10 minut. S dobou upnutí je k opracování potřeba 16 minut.

14. Celkový odpor, který materiál klade proti řezání třísky, označme R. Tento odpor můžeme rozložit do tří vzájemně kolmých směrů na tři složky. F_x , F_y a F_z . F_x – odpor proti posuvu, F_y – odpor proti přísuvu a F_z – řezný odpor. Platí $F_z : F_y : F_x = 1 : 0,4 : 0,25$. Z toho plyne, že největší význam má řezný odpor. Průřez třísky je $S \text{ mm}^2$. Měrný řezný odpor f , připadající na mm^2 průřezu třísky je: $f = F_z/S$. Vypočítejte řezný odpor a odpor proti posuvu a přísuvu u třísky o rozměrech 1 mm na 0,25 mm, jestliže měrný řezný odpor je 1 000 MPa.

Řešení:

Průřez třísky je $1 \cdot 0,25 = 0,25 \text{ mm}^2 = 0,25 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2$, a protože měrný řezný odpor je 1 000 MPa, $F_z = 0,25 \cdot 10^{-6} \cdot 1000 \cdot 10^6 \text{ N} = 250 \text{ N}$. Tedy podle zadaného poměru vypočítáme $F_x = 62,5 \text{ N}$, $F_y = 100 \text{ N}$.

15. Kolik kg slitiny se vyrobilo, spotřebovalo-li se při její výrobě 13 kg mědi, 27 kg antimonu a 285 kg cínu?

Řešení:

Slitina vznikne smísením roztavených kovů, proto $m = 13 \text{ kg} + 27 \text{ kg} + 285 \text{ kg} = 325 \text{ kg}$.

16. Ke zhotovení měkké pájky bylo použito $10\frac{3}{4}$ kg cínu a $15\frac{1}{2}$ kg olova. Jaká je hmotnost pájky?

Řešení:

Měkká pájka používaná na spoje v elektrotechnice je slitinou uvedených kovů. Slitina vznikne smísením roztavených kovů, proto m je součtem hmotností smísených kovů. Odtud: 26,25 kg.

17. Slitina k vylévání ložiskových pánví se skládá z 87 dílů cínu, 9 dílů antimonu a 4 dílů mědi. Kolik kg jednotlivých kovů je potřeba na 75 kg slitiny?

Řešení:

Slitina vznikne smísením roztavených kovů, proto je její hmotnost součtem hmotností smísených kovů. Vypočítáme hmotnost jednoho dílu a odtud: 65,25 kg cínu, 6,75 kg antimonu, 3 kg mědi.

18. V mosazném odlitku o hmotnosti 6,8 kg je 76 % zinku a 24 % mědi. Kolik kg každého z těchto kovů je v odlitku obsaženo?

Řešení:

Mosaz je slitina. Slitina vznikne smísením roztavených kovů, proto je její hmotnost součtem hmotností smísených kovů. Odtud: zinek 5,168 kg, měď 1,632 kg.

19. Ozubené kolo koná 4 620 otáček za 77 minut, druhé kolo koná 1 080 otáček za 54 minut. Kolikrát se první kolo otáčí rychleji než druhé?

Řešení:

Z porovnání počtu otáček za 1 minutu každého z kol zjistíme, že 3×.

20. Otočíme-li šroub 5krát, posune se dopředu o 3 mm. O kolik mm se posune po 15 otáčkách?

Řešení:

Z principu funkce šroubu vyplývá, že posunutí šroubu je přímo úměrné jeho otočení, odtud výsledek: o 9 mm.

21. Víme, že 42 kolejnicových šroubů má hmotnost 12 kg. Jakou hmotnost má 35 takových šroubů?

Řešení:

10 kg

22. Plochu frézovali s posuvem 50 mm za minutu po dobu 16 minut. Za jakou dobu ji ofrézují, zvětší-li se posuv na 80 mm za minutu?

Řešení:

Doba frézování a rychlost posunu jsou nepřímo úměrné: $x:16 = 50 : 80$, odtud 10 min.

23. Ramena páky jsou v poměru 3 : 5. Na konci kratšího ramene visí závaží o hmotnosti 30 kg. Kolik kg se má zavěsit na druhé rameno, aby nastala rovnováha?

Řešení:

Pro rovnováhu na páce platí $m_1 : m_2 = L_2 : L_1$, odtud: 18 kg.

24. Hnací ozubené kolo má 24 zubů a koná 720 ot./min. Hnaný hřídel má konat 160 ot./min. Kolik zubů musí mít hnané ozubené kolo spojené pevně s hřídelí?

Řešení:

Pro převody ozubenými koly platí $Z_1 : Z_2 = n_2 : n_1$, odtud 108.

25. Plocha součástky je na výkresu zobrazena obdélníkem 5 mm x 3 mm. Měřítko je 1 : 100. Určete skutečný obsah zobrazené plochy součástky.

Řešení:

0,15 m²

26. Pět strojů zpracuje materiál ze skladu za 8 dní. Za jakou dobu zpracuje materiál ze skladu 8 takových strojů?

Řešení:

5 dní

27. Soukolí se skládá ze dvou ozubených kol. Jedno má 63 zubů a otáčky 600 min⁻¹. Kolik otáček za minutu vykoná druhé kolo, má-li 42 zubů?

Řešení:

Pro převody ozubenými koly platí $Z_1 : Z_2 = n_2 : n_1$, odtud 900.

28. Při zhotovení 16 stejných beden se spotřebovaly 4 kg hřebíků. Kolik kg hřebíků se spotřebuje na 25 beden?

Řešení:

6,25 kg

29. Jedno ozubené kolo má 25 zubů a druhé kolo 32 zubů. Po kolika otáčkách budou mít kola stejné postavení?

Řešení:

- a) Pro převody ozubenými koly platí $Z_1 : Z_2 = n_2 : n_1$, odtud 32 a 25, 64 a 50... otáček.
- b) Pokud mají mít kola stejné postavení, musí na obou kolech projít místem kontaktu kol stejný počet zubů. Tedy $Z_1 \cdot n_1 = Z_2 \cdot n_2$, kde Z_1 a Z_2 jsou počty zubů obou kol a n_1 a n_2 jsou počty otáček obou kol. Po dosazení dostaneme $32 \cdot n_1 = 25 \cdot n_2$. Hledáme tedy společný násobek čísel 25 a 32. Protože tato čísla jsou nesoudělná, budou řešením pro menší kolo násobky čísla 32, tedy 32, 64, 96... a pro větší kolo násobky čísla 25, tedy 25, 50, 75... otáček.

30. Dvě ozubená kola mají 12 a 25 zubů. Kolikrát se otočí větší kolo za 16,5 minuty, jestliže se menší kolo otočí za 5,5 minuty 50krát.

Řešení:

- a) Menší kolo se za 16,5 minuty otočí 150x. Pro převody ozubenými koly platí $Z_1 : Z_2 = n_2 : n_1$, odtud pro velké kolo: 72krát.
- b) Místem kontaktu obou ozubených kol projde u malého kola za 5,5 minuty $50 \cdot 12 = 600$ zubů. Za 16,5 minuty projde místem trojnásobek, tedy 1800 zubů. Což znamená $1800 : 25 = 72$ otáček.

31. Jedno kyvadlo vykoná za minutu 80 kyvů a druhé 100 kyvů. V jakém poměru jsou doby kyvů obou kyvadel?

Řešení:

Doba kyvu jednoho kyvadla je $1/80$ minuty, druhého $1/100$ minuty. Odtud: 5 : 4.

32. V tavicí peci na tavení šedé litiny se spotřebuje na 1 tunu litiny 120 kg koksu a 50 kg vápna. Kolik koksu a kolik vápna se spotřebuje za 24 hodin, jestliže se za 1 hodinu vytaví $11 \frac{1}{2}$ tuny litiny?

Řešení:

Za 24 hodin se vytaví 276 t litiny; spotřeba koksu je $33 \frac{3}{25}$ t; spotřeba vápna je $13 \frac{4}{5}$ t.

33. Syrové dřevo pro modelárnu vážilo 550 kg, vysušené mělo 410 kg. Kolik % hmotnosti syrového dřeva činila voda?

Řešení:

25,45 %

34. Osoustružená hřídel má 38 kg. Odpad činil 8 % původní hmotnosti. Jakou hmotnost měl polotovár?

Řešení:

41,30 kg

35. Hmotnost obrobeného výkovku je 22 kg. Jak těžký kus oceli je třeba v kovárně použít, činí-li ztráty opalem 2,3 %, ztráta osekáním 8 % a obráběním 14 %?

Řešení:

29,06 kg

36. O kolik procent se změnil obsah průřezu plechového potrubí, jehož kruhový tvar při téměř obvodu byl změněn na čtvercový?

Řešení:

Z podmínky $2\pi R = 4a$ určíme stranu vzniklého čtverce. Odtud porovnáním obsahů kruhu a čtverce: Obsah průřezu se zmenšil na 78,54 % původního obsahu, což znamená, že se změnil o 21,46 %.

37. Při výrobě modelu pro odlitek z ocelolitiny se k délkovým mírám přidávají 2 % se zřetelem ke smrštění odlitku při chladnutí. Jaké jsou rozměry modelu pro litinovou desku, která má měřit 620 mm x 420 mm x 45 mm?

Řešení:

632,4 mm x 428,4 mm x 45,9 mm

38. Opal výkovků činí 3 % jejich hmotnosti pro jedno vyhřátí. Jaká je ztráta opalem u výkovků o hmotnosti 85 kg (1 vyhřátí), 125 kg (3 vyhřátí) a 268 kg (2 vyhřátí)? Jaká bude hmotnost hotových výkovků, jestliže obráběním ztratí první dva obrobky 20 % a třetí 16 % hmotnosti?

Řešení:

Opal je ztráta hmotnosti způsobená oxidací povrchu výkovku při vyhřátí. Ztráty opalem jsou 2,55 kg, 10,92 kg a 15,84 kg. Další ztráty vznikají při obrábění. Odtud: 65,96 kg; 91,27 kg; 211,82 kg.

39. Zaměstnankyně dílny vyrobila v prvním týdnu 2000 obrobků, z toho byla 2 % vadných. V druhém týdnu vyrobila 3000 výrobků, z toho bylo 5 % vadných. Kolik procent vadných výrobků měla za čtrnáct dnů práce?

Řešení:

3,8 %

40. Při obrobení součástky činil odpad 16 % hmotnosti polotovaru.
- a) V jakém poměru je hmotnost polotovaru k obrobené součástce?
 - b) V jakém poměru je hmotnost obrobené součástky k hmotnosti odpadu?

Řešení:

a) $100 : 84 = 25 : 21$

b) $84 : 16 = 21 : 4$

41. Účinnost topeniště je 32 %. Kolik uhlí by se ušetřilo za měsíc o 31 dnech při denní spotřebě 24 tun, zvýšila-li by se účinnost na 34 %?

Řešení:

Měsíční spotřeba je 744 t; využitá hmotnost uhlí je při účinnosti 32 % 238,08 t. Při účinnosti 34 % by na to bylo potřeba 700,24 t. Ušetřeno by mohlo být téměř 44 t uhlí.

42. Model automobilu Tatra Phoenix má mít délku 50 cm. Jak vysoký a široký bude model, jestliže skutečný vůz má délku 8,5 m, šířku 2,5 m a výšku 3,25 m.

Řešení:

Šířka 14,7 cm, výška 19,1 cm.

$$\frac{x}{250} = \frac{y}{325} = \frac{50}{850}$$

2 Finanční matematika

1. Vypočítejte hrubou mzdu zaměstnance za opracování 18 děr v litinové skříni, bylo-li zjištěno, že 5 děr vrtá průměrně $\frac{1}{3}$ hodiny a hodinová mzda je 180 Kč.

Řešení:

216 Kč

2. Vstupní hodnota obráběcího stroje klesla po 6 letech používání na 64 % původní hodnoty. Tím se původní hodnota snížila o 315 000 Kč. Jaká byla vstupní hodnota nového stroje a kolik činila po 6 letech používání?

Řešení:

Nový stroj 875 000 Kč, po 6 letech 560 000 Kč.

3. Řemeslník měl roční základ daně 550 000 Kč, sazba daně činí 15 %. Jak velkou daň (kolik Kč) zaplatil?

Řešení:

82 500 Kč

4. Při přípravě výroby nového výrobku bylo nutné zakoupit 3 stroje v pořizovacích cenách 532 000 Kč, 1 153 000 Kč a 110 500 Kč a na stavební investice vynaložit 3 460 700 Kč. Kolik činily celkem investiční náklady?

Řešení:

5 256 200 Kč

5. První společník vložil do společnosti 1 400 000 Kč, druhý společník 600 000 Kč. Výtěžek 1 900 000 Kč si rozdělili v poměru vkladu. Kolik dostal každý?

Řešení:

1 330 000 Kč; 570 000 Kč

6. V jednom roce prodala podnikatelka výrobky za 78 000 Kč, v následujícím roce za 135 000 Kč. O kolik procent jí stoupl prodej?

Řešení:

O 73 %.

7. Cena surových a obrobených odlitků jistého druhu je v poměru 2 : 5. Je-li cena surových odlitků 340 Kč/kg, jaká bude cena obrobených výrobků?

Řešení:

Zřejmě platí $340 : 2 = x : 5$, odtud: 850 Kč/kg.

8. Ve velkoobchodě mají 250 chladniček v ceně 7 850 Kč. Prodalo se 95 chladniček.
- a) Kolik Kč velkoobchod utržil?
 - b) Kolik % chladniček se prodalo?
 - c) Jaká bude cena chladničky, jestliže ji sníží o 15 %?

Řešení:

- a) 745 750 Kč
 - b) 38 %
 - c) 6 672,50 Kč
9. Obchod má na skladě sortiment v celkové hodnotě 350 000 Kč. V týdnu se prodalo zboží za 140 000 Kč.
- a) Kolik se prodalo kusů zboží, jestliže jeden kus stál 3 500 Kč?
 - b) Kolik % zboží zůstalo na skladě?
 - c) Kolik kusů zboží zůstane ve skladě, jestliže se zásoby sníží o 75 %?

Řešení:

- a) 40 kusů
 - b) 60 %
 - c) 25 kusů z původního počtu kusů (nebo 15 kusů z počtu kusů po týdenním prodeji)
10. Zaměstnanec dílny zkrátí čas potřebný k opracování výrobku ze 16 minut na 4 minuty. Jeho mzda stoupla z 88 Kč za hodinu na 120 Kč za hodinu. O kolik procent se zlevnila výroba jednoho výrobku?

Řešení:

Vypočteme v obou případech počet opracovaných výrobků za jednotku času, např. 1 hodinu a vypočteme mzdu za 1 opracovaný výrobek v obou případech. Porovnáním: Snížily se mzdové náklady, výroba jednoho výrobku zlevnila o 65,9 %.

11. a) Měsíční výdělek Petra se zvýšil o 30 %. O kolik procent vzrostla jeho kupní síla při nezměněných cenách?

- b) Petrův výdělek se nezměnil, ale ceny veškerého zboží byly sníženy o 30 %. O kolik procent se zvýšila jeho kupní síla v tomto případě?

Řešení:

- a) Zvýší-li se měsíční výdělek o 30 %, zvýší se stejně i Petrova kupní síla, tedy o 30 %.
- b) Jestliže se Petrův výdělek nezmění, ale ceny veškerého zboží se sníží o 30 %, nezvýší se jeho kupní síla o 30 %, jak se mnozí domnívají, ale více. Je-li například možné koupit za 1 korunu jeden předmět v ceně 1 koruny, bude možné po snížení jeho ceny na 70 haléřů (o 30 %) koupit za 1 korunu $100/70 = 10/7$ předmětů, tj. o $3/7$ čili asi o 43 % více.

12. Knihkupec poskytl na knihu desetiprocentní slevu z původně stanovené ceny, přitom však měl stále ještě osm procent zisku. Kolikaprocentní zisk chtěl mít knihkupec původně při prodeji této knihy?

Řešení:

Nesprávná analogie zde může vést k nesprávné odpovědi: $10 + 8 = 18$ %. Ve skutečnosti byl však původně předvídaný zisk 20 %. Prodej s 10 % slevou totiž vynesl 8 % zisku. To znamená, že 90 % stanovené ceny činilo 108 % z té ceny, kterou knihkupec za knížku zaplatil dodavateli. Snadno určíme, kolik procent z této „nákupní ceny“ knížky by činila celá původně stanovená cena.

Sestavíme úměru: $\frac{90}{100} = \frac{108}{x}$ Z toho $x = 120$ %.

Původně byl tedy předpokládán zisk 20 %.

13. O kolik procent se zvýšila produktivita dělníkovy práce, když zkrátil dobu potřebnou k vyrobění součástky o p %?

Řešení:

Mnozí lidé si myslí, že produktivita práce se zvýší o tolik procent, o kolik se zkrátí čas na zhotovení výrobku. Lze snadno dokázat, že je to omyl. Dejme tomu, že je na zhotovení jednoho výrobku zapotřebí 1 hodina. Zkrátí-li se potřebná doba o p %, bude o $0,01 \cdot p$ hodiny kratší a bude se tedy rovnat $(1 - 0,01 \cdot p)$ hodiny. Za jednu hodinu se pak

zhotoví nikoli jeden výrobek, ale $\frac{1}{1 - \frac{p}{100}} = \frac{100}{100 - p}$ tedy se vyrobí o $\frac{100}{100 - p} - 1 = \frac{p}{100 - p}$

výrobku více. Vyjádříme-li toto zvýšení výroby v procentech, dostaneme $\frac{100p}{100 - p}$ %.

Sníží-li se například časová norma o 50 % ($p = 50$), vzroste produktivita práce nikoli o 50 %, ale o 100 %, čili na dvojnásobek.

14. Jeden rok se cena materiálu 100 Kč/kg snížila o 10 % a druhý rok se tato snížená cena o 10 % zvýšila. Kolik teď stojí 1 kg materiálu a o kolik procent se liší od ceny před dvěma roky?

Řešení:

Poklesla o 1 %

15. Paní Nováková si uložila u banky na termínovaný účet s výpovědní lhůtou jeden rok částku 50 000 Kč. Vypočítejte:

- a) úrok před zdaněním, je-li úroková míra 0,6 % p.a.;
- b) úrok po zdanění 15 %;
- c) jak velkou částku paní Nováková obdrží.

Řešení:

- a) 300 Kč
- b) 255 Kč
- c) 50 255 Kč

16. Podnikatel si u banky uložil částku 150 000 Kč. Po roce mu banka sdělila, že po přičtení úroku vložená částka vzrostla na 150 750 Kč. Vypočítejte, jaká byla úroková míra a jakou částku podnikatel obdržel po zdanění 15 %.

Řešení:

Úroková míra je 0,5, obdržel částku 50 637 Kč.

17. Vstupní hodnota stroje byla 250 000 Kč. Jaká bude jeho hodnota za 10 let, jestliže se ročně znehodnotí opotřebením o 20 %?

Řešení:

$$a_{10} = a_0 \cdot (1 - r)^{10} \Rightarrow a_{10} = 250\,000 \cdot 0,8^{10} = 1\,683,55 \text{ Kč}$$

18. Stroj ztrácí opotřebením každý rok 4,5 procenta ze své vstupní hodnoty. Za jakou dobu klesne jeho hodnota na polovinu?

Řešení:

$$\frac{1}{2} \cdot a_0 = a_0 \left(1 - \frac{p}{100}\right)^n \Rightarrow \frac{\log 0,5}{\log(1-0,045)} \approx 15$$

19. Ze vstupní hodnoty stroje se každý rok odepisuje 4,5 % na opotřebení. Vypočítejte, jakou hodnotu bude mít stroj po 10 letech, jestliže jeho vstupní hodnota byla 100 000 Kč.

Řešení:

$$a_{10} = 100\,000 \text{ Kč} \cdot (1 - 0,045)^{10} = 100\,000 \text{ Kč} \cdot 0,955^{10} = 63\,101 \text{ Kč}$$

3 Algebra (Výrazy s proměnnými)

1. V litinové součástce se vrtají čtyři díry s průměrem 10 mm, 2 díry s průměrem 16 mm a jedna díra s průměrem 24 mm. Jak dlouho trvá vyvrtání 320 litinových součástek, jestliže vrtání jedné díry s průměrem 10 mm trvá $t_1 = 5$ s, díry s průměrem 16 mm $t_2 = 7$ s, díry s průměrem 24 mm $t_3 = 10$ s a výměna i upnutí součástky $t_4 = 16$ s?

Řešení:

Vrtání děr v jedné součástce a výměna trvá $t' = 4t_1 + 2t_2 + t_3 + t_4$.

320 součástek $t = 320 \cdot t' = 320 \text{ min} = 5 \text{ hod } 20 \text{ min}$

2. Hodnota materiálu spotřebovaného na lisu při určité práci byla x Kč za hodinu. Zmenšením odpadu se zmenšila o 200 Kč za hodinu.
- a) Kolik činila úspora při y pracovních hodinách?
- b) Jaká byla pak hodnota materiálu spotřebovaného za y pracovních hodin?

Řešení:

a) Úspora za 1 hod 200 Kč, při y hodinách 200 y Kč.

b) Původní spotřeba xy Kč, po úspoře 200 Kč/h je spotřeba $(xy - 200y)$ Kč

3. Zaměstnankyně dílny pracovala x směn a v jedné směně zpracovala 15 kg materiálu. Dále pracovala y směn, kde v každé směně zpracovala 40 kg materiálu. Kolik materiálu zpracovala celkem?

Řešení:

V x směnách zpracovala 15 x materiálu, v y směnách 40 y materiálu, celkem zpracovala $(15x + 40y)$ materiálu.

4. Hřídel je třikrát odstupňovaný. Délka druhého stupně je o 10 mm větší než dvojnásobná délka prvního stupně a délka třetího stupně je třikrát delší než délka prvního stupně zmenšená o 20 mm. Jaká je délka hřídele L , je-li délka prvního stupně hřídele l ?

Řešení:

Délka druhého stupně $2l + 10$ mm; délka třetího stupně $(l - 20) \cdot 3$. Délka celého hřídele: $L = l + (2l + 10) + (l - 20) \cdot 3 = 6l - 50$ mm.

5. Jaká bude tloušťka $t = d \cdot \sqrt{\frac{\sigma_0}{E}}$ litinového těsnicího kroužku pro píst s průměrem $d = 125 \text{ mm}$, je-li modul pružnosti litiny $E = 1 \cdot 10^5 \text{ N.mm}^{-2}$ a připouští se dovolené napětí v ohybu $\sigma_0 = 100 \text{ N.mm}^{-2}$?

Řešení:

$$t = 3,953 \text{ mm}$$

6. Vypočítejte modul ozubeného kola $m = 0,8 \cdot \sqrt{\frac{F}{\sigma_0}}$ zatíženého obvodovou silou $F = 4\,500 \text{ N}$ při dovoleném napětí litiny v ohybu silou $\sigma_0 = 2\,100 \text{ N.cm}^{-2}$?

Řešení:

$$m = 1,171$$

7. Ze tří kovů byla utvořena slitina, a to z $m \text{ kg}$ kovu po $a \text{ Kč}$ za 1 kg , z $n \text{ kg}$ kovu o $b \text{ Kč}$ za 1 kg dražšího než kov předchozí a z třetího kovu, dvakrát dražšího než druhý kov. Slitiny bylo $p \text{ kg}$. Zapište vztahy, které vyplývají z textu úlohy, a určete, jaká je celková cena slitiny. Určete cenu slitiny, jestliže $m = 20 \text{ kg}$, $n = 30 \text{ kg}$, $p = 100 \text{ kg}$, $a = 100 \text{ Kč}$ a $b = 200 \text{ Kč}$.

Řešení:

$m \text{ kg}$ po $a \text{ Kč}$ stojí $a \cdot m \text{ Kč}$; $n \text{ kg}$ po $(a + b) \text{ Kč}$ stojí $n \cdot (a + b) \text{ Kč}$; třetího kovu je $[p - (m + n)] \text{ kg}$, přičemž 1 kg stojí $2 \cdot (a + b) \text{ Kč}$; třetí kov stojí $2 \cdot (a + b) \cdot [p - (m + n)] \text{ Kč}$.

Cena slitiny je $[am + n \cdot (a + b) + 2 \cdot (a + b) \cdot (p - m - n)] \text{ Kč}$, což je po dosazení $41\,000 \text{ Kč}$.

8. O kolik se prodlouží ocelový drát s průřezem $S = 100 \text{ mm}^2$ délky $l = 3 \text{ m}$ zatížený silou $F = 10\,000 \text{ N}$, je-li modul pružnosti $E = 2,2 \cdot 10^5 \text{ N.mm}^{-2}$ a prodloužení $\Delta l = \varepsilon \cdot l$, $\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$,

$$\sigma = \frac{F}{S}.$$

Řešení:

$$\Delta l = \varepsilon \cdot l = \frac{\sigma}{E} \cdot l = \frac{\frac{F}{S}}{E} \cdot l = \frac{F \cdot l}{E \cdot S} = 1,36 \text{ mm}$$

9. Délku vodiče vypočítáme podle vztahu $l = \frac{R \cdot S}{\rho}$. Jaký vzorec pro l dostaneme po dosazení

$$R = \frac{U}{I}?$$

Řešení:

$$l = \frac{\frac{U}{I} \cdot S}{\rho} = \frac{U \cdot S}{\rho \cdot I}$$

10. Do kruhové podložky o průměru $D = 42$ mm byl vyvrtán otvor o průměru $d = 13$ mm. Určete vzdálenost středů obou kružnic, jestliže vzdálenost krajního bodu otvoru od strany podložky je $t = 3,5$ mm.

Řešení:

$$l = \frac{D}{2} - \frac{d}{2} - t = 11 \text{ mm}$$

11. Ve čtvercové podložce o straně $l = 44,5$ mm vyvrtejte otvor o průměru $d = 19,26$ mm, jehož střed leží na ose podložky kolmé na stranu čtverce ve vzdálenosti $m = 6,88$ mm od středu podložky. Určete vzdálenost otvorů od stran podložky.

Řešení:

$$x_1 = \frac{l}{2} - \frac{d}{2} - m = 5,74 \text{ mm}$$

$$x_2 = \frac{l}{2} + m - \frac{d}{2} = 19,50 \text{ mm}$$

$$x_3 = x_4 = \frac{l}{2} - \frac{d}{2} = 12,62 \text{ mm}$$

12. Do obdélníkové podložky, jejíž delší strana má délku $l = 720$ mm, byly na ose kratší strany vyvrtány vedle sebe tři otvory. Prostřední o průměru D a dva menší o průměru $d = 114$ mm. Určete velikost průměru prostředního otvoru, víte-li, že krajní otvory mají od kratší strany podložky vzdálenost $f = 53$ mm a vzdálenost každého z menších otvorů od většího otvoru je $e = 53$ mm.

Řešení:

$$D = l - 2d - 2e - 2f = 280 \text{ mm}$$

13. Zaměstnanec dílny má vyrobit kostku ve tvaru krychle o hraně a . O kolik cm se zmenší její objem, jestliže při opracování zmenší hranu o délku x ? Výsledek ověřte pro $a = 10$ cm a $x = 2$ cm.

Řešení:

$$\text{vzorec } V = x(3a^2 - 3ax + x^2); V = 488 \text{ cm}^3$$

14. Z plechu tvaru čtverce s úhlopříčkou o délce 40 cm, který má tloušťku 7 mm, je potřeba vyříznout co největší kruh. Vypočítejte procento odpadu. (Hustota je $7,85 \text{ g.cm}^{-3}$.)

Řešení:

Průměr kruhu $d = a$; $a = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot u$, objem válce $V_1 = \frac{\pi d^2}{4} \cdot t$, objem hranolu $V_2 = a^2 \cdot t$,
 hmotnost odpadu $m = \rho \cdot (V_2 - V_1)$, $a = 28,284 \text{ cm}$, $V_1 = 439,815 \text{ cm}^3$, $V_2 = 559,989 \text{ cm}^3$,
 hmota plechu $m = 4,396 \text{ kg}$, hmota odpadu $m = 0,943 \text{ kg}$. Odpad činí 21,46 % (nepřesnost
 v setině způsobená zaokrouhlováním – obsah čtverce – obsah kruhu vyděleno obsahem
 čtverce $= 1 - \frac{\pi}{4}$).

15. Jaké otáčky musí mít fréza o průměru 50 mm, je-li její řezná rychlost 20 m.min^{-1} .

Řešení:

$$v = 20 \text{ m/min}, d = 0,05 \text{ m}, v = \pi \cdot d \cdot n \Rightarrow n = \frac{v}{\pi \cdot d} = 127,324$$

Fréza má 127 otáček za minutu.

16. Na výrobu mříže jsou potřeba 4 ocelové tyče.

- Kolik tyčí bude třeba na výrobu deseti mříží?
- Zapište, kolik tyčí bude třeba na výrobu m mříží.
- Kolik mříží je možné vyrobit ze 75 tyčí?
- Zapište, kolik mříží je možné vyrobit z t tyčí.

Řešení:

- Na jednu mříž jsou potřeba 4 tyče, tedy na 10 mříží bude zapotřebí 40 tyčí.
- Na výrobu m mříží bude potřeba $4 \cdot m$ tyčí.
- Protože $75 : 4 = 18,75$, tedy ze 75 tyčí je možné vyrobit 18 mříží a 3 tyče zbydou.
- Počet mříží, které jdou vyrobit z t tyčí, je dán celou částí zlomku $t/4$. Tedy pro počet x vyrobených mříží musí platit $x \leq t/4$.

17. Na upevnění jedné součástky jsou potřeba 3 šrouby a 5 matic.

- Kolik šroubů a matic bude třeba na upevnění 200 součástek?
- Zapište, kolik šroubů a matic bude třeba na upevnění n součástek?

- c) Kolik součástí je možné upevnit pomocí 400 šroubů a 600 matic?
- d) Zapište, kolik součástí je možné upevnit pomocí s šroubů a m matic?
- e) Kolik součástí bylo upevněno, jestliže bylo použito přesně o 50 matic víc než šroubů?

Řešení:

- a) 600 šroubů a 1000 matic
- b) $3n$ šroubů a $5n$ matic
- c) 120
- d) maximum z celých částí zlomků $s/3$ a $m/5$
- e) 25

18. Výrobní operace trvá m minut.

- a) Zapište, jak dlouho trvá provedení 100 těchto operací? Kolik je to hodin?
- b) Zapište, kolik těchto operací se provede za jednu hodinu?
- c) Zapište, kolik těchto operací se provede za jednu osmihodinovou směnu?
- d) Zapište, kolik těchto operací by se provedlo za jednu osmihodinovou směnu, kdyby se doba trvání operace zkrátila na polovinu?

Řešení:

- a) $100m$ minut což je $10.m / 6$ hodin
- b) $60/m$
- c) $8.60/m$
- d) $2.8.60/m$

19. Stroj vyrobí za 1 hodinu s součástek.

- a) Zapište, kolik součástek vyrobí za osmihodinovou směnu.
- b) Zapište, kolik součástek vyrobí za 1 minutu.
- c) Zapište, jak dlouho trvá vyrobít 1 součástku.
- d) Zapište, o kolik součástek by vyrobil stroj za osmihodinovou směnu navíc, kdyby byl rychlejší a za hodinu vyrobil o dvě součástky navíc.
- e) Jak dlouho by stroj vyráběl jednu součástku, kdyby za hodinu vyrobil o dvě součástky navíc?

Řešení:

- a) $8s$
- b) $s/60$
- c) $1/s$ hodin

d) $2.8 = 16$

e) $\frac{1}{s+2}$.

20. První dělník vyrobí za hodinu a výrobků a druhý dělník vyrobí za hodinu b výrobků. Zapište, o kolik výrobků víc vyrobí první dělník za osmihodinovou směnu než druhý dělník?

Řešení:

$8.(a - b)$

21. Paní Nováková vyrobí za osmihodinovou směnu m výrobků. Všechny výrobky prodá a za každý utrží c korun. Provozní náklady na výrobu jednoho výrobku jsou n korun. Vyjádřete hrubý zisk paní Novákové za hodinu práce.

Řešení:

$$\frac{(c - n).m}{8}$$

22. Automobil Bugatti Veyron ve sportovní verzi, dokáže jet rychlostí až 431 km/h. Maximální rychlost 431 km/h je elektronicky omezena na 415 km/h, protože pneumatiky, by dlouhodobě nevydržely takové zatížení.

- a) Pro dostředivou i odstředivou sílu platí vztah $F = \frac{m.v^2}{r}$. Ze základní školy víme,

že jeden kilogram je přitahován k Zemi silou asi 10 N. Vypočítejte, jak velká dostředivá a odstředivá síla působí na jeden kilogram pláště pneumatiky o poloměru 40 cm při obou rychlostech.

- b) Vypočítejte zrychlení auta a podle vztahu $a = \frac{v}{t}$, jestliže auto zrychlí z 0 na 100 km/h za 2,5 s a porovnejte s tíhovým zrychlením. Běžné tíhové zrychlení je $g = 9,8 \text{ N/kg}$.

Řešení:

a) Pro nižší rychlost: $F = \frac{1 \text{ kg} \cdot \left(115,3 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{0,4 \text{ m}} = 33\,235 \text{ N}$

Pro vyšší rychlost: $F = \frac{1 \text{ kg} \cdot \left(119,7 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{0,4 \text{ m}} = 35\,820 \text{ N}$

Na jeden kilogram pláště pneumatiky působí síla odpovídající tíze tělesa o hmotnosti 3323,5 kg a 3582 kg.

b) $a = \frac{(100:3,6) \frac{\text{m}}{\text{s}}}{2,5 \text{ s}} = 11,11 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ Zrychlení je větší než 9,8 N/kg (m/s^2)

4 Funkce

1. Zaměstnankyně dílny má vyrobit z tyče o délce 2 m součástku, která má délku 25 mm. Vyjádřete funkci, která udává závislost délky zbývajících částí tyče na počtu zhotovených součástek, a sestrojte její graf.

Řešení:

$$y = 2 - 0,025 \cdot x \quad \{x \in Y_0^+; x \leq 80\}$$

2. Dvě ozubená kola k_1 , k_2 zapadají do sebe. Kolo k_1 má 84 zubů a vykoná 60 otáček za minutu. Určete závislost počtu otáček kola k_2 na počtu jeho zubů. Kolik otáček vykoná kolo k_2 , má-li 20 zubů?

Řešení:

k_1 se za minutu otočí o $84 \cdot 60$ zubů, protože zuby do sebe zapadají, tak k_2 se otočí také o $84 \cdot 60$ zubů. n je počet zubů a y počet otáček kola k_2 , pak platí $y \cdot n = 84 \cdot 60 \Rightarrow y = \frac{5040}{n}$. Pro $n = 20$ $y = 252$.

3. Soustružník obrábí na soustruhu součástku o průměru 15 mm. Určete, kolik otáček za minutu musí součástka vykonat, jestliže jeho řezná rychlost je 30 m/min.

Řešení:

Řezná rychlost je obvodová rychlost obrobku v místě řezu a platí pro ni vztah $v = \pi \cdot d \cdot n$, $n = \frac{30\,000}{\pi \cdot d}$, odtud musí vykonat 637 otáček.

4. Automat potřebuje na výrobu jednoho šroubu 30 mm tyče, jejíž původní délka je 3 m. Určete funkci, která určuje závislost délky l zbytku tyče na počtu p zhotovených šroubů.

Řešení:

$$l = 3\,000 - 30 \cdot p$$

5. Železná tyč je při teplotě $t_0 = 10^\circ \text{C}$ dlouhá $l_0 = 1$ m. Napište, jaká je závislost její délky l na teplotě t , víte-li, že $l = l_0[1 + \alpha \cdot (t - t_0)]$ a $\alpha = 12 \cdot 10^{-6} \text{K}^{-1}$

Řešení:

$$l = 1 \cdot [1 + 12 \cdot 10^{-6} \text{K}^{-1} \cdot (t - 10)] \Rightarrow l = 0,000012t + 0,99988$$

6. Relativní prodloužení drátu je dáno vzorcem $\frac{\Delta l}{l} = \frac{P}{E \cdot q}$, kde E je modul pružnosti v tahu, P je síla protahující drát a q průřez drátu. Určete závislost relativního prodloužení y na síle P v N, je-li $E = 2 \cdot 10^4 \text{ kg} \cdot \text{mm}^{-2}$ a $q = 10^{-2} \text{ mm}^2$, $\frac{\Delta l}{l} = y$.

Řešení:

$$y = \frac{1}{E \cdot q} \cdot P \Rightarrow y = 0,005 \cdot P$$

7. Máme soukolí dvou ozubených kol. Do kola se 40 zuby zapadá kolo s x zuby. Kolikrát se druhé kolo otočí, jestliže se první kolo otočí patnáctkrát? Jaká funkce vyjadřuje závislost počtu otáček y druhého kola na počtu zubů x ?

Řešení:

Pro převody ozubenými koly platí $Z_1 : Z_2 = n_2 : n_1$, odtud: $y = \frac{600}{x}$

8. Kotel parního válce má tvar válce o průměru d a výšce v . Najděte funkci, která vyjadřuje závislost objemu V na průměru podstavy d , je-li výška $v = 6 \text{ m}$

Řešení:

$$V = \frac{6}{4} \cdot \pi \cdot d^2$$

9. Ocelová tyč dlouhá 0,75 m s průměrem 50 mm má hmotnost 11,25 kg. Určete funkci, která vyjadřuje závislost hmotnosti tyče v kg na její délce v metrech. Z předpisu funkce určete:
- hmotnost tyče o délce 8 m
 - délku tyče o hmotnosti 75 kg

Řešení:

Označíme-li délku l a hmotnost m , dostaneme funkci $m = k \cdot l$, kde $k = 11,25 \text{ kg} : 0,75 \text{ m} = 15 \text{ kg/m}$

a) $m = 15 \cdot 8 = 120$; odtud $m = 120 \text{ kg}$

b) $l = \frac{m}{k} = 5 \text{ m}$

10. Automatický stroj zhotovuje šrouby z tyče 3 m dlouhé. Na jeden šroub se spotřebuje část dlouhá 25 mm. Vyjádřete tabulkou a rovnicí závislost mezi počtem zhotovených šroubů a délkou zbývajících tyče.

Řešení:**Tabulka 1. Funkce – příklad 10 – řešení**

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	2,975	2,950	2,925	2,900	2,875	2,850	2,825	2,800	2,775	2,750

$$y = 3\,000 - 25x, (0 \leq x \leq 120)$$

11. Při obrábění na obráběcím stroji se spotřebují 2 l chladicí směsi za minutu. Určete funkci, která vyjadřuje závislost objemu chladicí kapaliny v zásobníku na čase, bylo-li v zásobníku 25 l kapaliny.

Řešení:

$$V - \text{objem kapaliny v dm}^3, t - \text{čas v minutách}, V = 25 - 2t, (0 \leq t \leq 12,5)$$

12. Z drátu dlouhého 120 cm máme vytvořit model kváдру o čtvercové podstavě. Vyjádřete povrch kváдру jako funkci podstavné hrany a. Jak dlouhé musí být tyto hrany, aby byl povrch největší?

Řešení:

Pro drátěný model kváдру platí: $120 = 8a + 4v$, potom $v = 30 - 2a$. Povrch kváдру vypočteme podle vzorce $S = 2a^2 + 4v = 2a^2 + 4(30 - 2a) = 120a - 6a^2$, grafem této funkce je parabola s vrcholem v bodě $V[10; 600]$. Aby byl povrch kváдру největší, musí se jednat o krychli o straně $a = 10$ cm.

13. Z plíšků o průměru 4 cm a tloušťce 1 mm se vyrábějí podložky ve tvaru mezikruží s různými vnitřními poloměry. Určete funkci, která vyjadřuje závislost objemu V (v mm^3) podložky na průměrech r (v mm) vnitřních kružnic.

Řešení:

Pro objem podložky platí vztah $V = \pi \cdot (R^2 - r^2) \cdot v$. Protože $R = 20$ mm a $v = 1$ mm, je funkce vyjádřena rovnicí $V = \pi \cdot (400 - r^2)$.

14. Z plechu máme vyrobit plechovku ve tvaru válce, která má objem 4 dm^3 . Určete funkci, která vyjadřuje závislost spotřeby plechu na poloměru podstavy válce.

Řešení:

Pro objem válce platí vzorec $V = \pi \cdot r^2 \cdot v$, proto $v = \frac{V}{\pi \cdot r^2}$. Povrch válce vypočítáme ze vztahu. $S = 2 \cdot \pi \cdot r^2 + 2 \cdot \pi \cdot r \cdot v = 2 \cdot \pi \cdot r^2 + 2 \cdot \pi \cdot r \cdot \frac{4}{\pi \cdot r^2}$ Závislost spotřeby plechu na podstavě pláště vyjadřuje tedy funkce $S = 2 \cdot \pi \cdot r^2 + \frac{8}{r}$.

15. Pro vylišování nádoby o průměru d a výšce h z kruhového plechu o průměru D platí vztah $D = \sqrt{d^2 + 4 \cdot d \cdot h}$. Vyjádřete výšku h jako funkci průměru d při daném průměru plechu D .

Řešení:

Po úpravě vzorce dostaneme $D^2 = d^2 + 4dh$, odtud $h = \frac{D^2 - d^2}{4d}$.

16. Místo plechu s rozměry 200 mm a 150 mm máme použít plech obdélníkového tvaru, který bude mít stejnou plochu, ale jeho šířka bude 100 mm. Jaká bude nová délka plechu?

Řešení:

Rozměry původního plechu jsou $a = 200$ mm a $b = 150$ mm, proto $S = a \cdot b$ $S = 30\,000$ mm². Druhý plech má rozměry y a $x = 100$ mm, pak $y = \frac{S}{x} = \frac{30\,000}{100} = 300$; $y = 300$ mm.

17. Ozubené kolo o průměru d mm vykoná n otáček za minutu a zasahuje do jiného ozubeného kola o průměru 300 mm, které se otočí desetkrát za minutu. Najděte funkci, která udává závislost n na d .

Řešení:

$$n = \frac{3\,000}{d}$$

18. Jakou nejmenší hodnotu musí mít koeficient smykového tření f na třecím bubnu, aby těleso působící silou $Q = 6\,000$ N bylo udrženo silou $F = 2\,500$ N, jestliže úhel opásání je 180° a platí $F = Q \cdot e^{-fx}$, kde x je úhel v radiánech.

Řešení:

$$2\,500 = 6\,000 \cdot e^{-fx}, f = 0,28$$

19. Na třecím bubnu zdvihadla je provaz, jehož jedním koncem se zvedá těleso Q a na druhém konci visí závaží $q = \frac{Q}{1000}$, aby bylo dosaženo dostatečného tření. Určete, kolikrát musí být provaz ovinut, je-li tření $f = \frac{1}{3}$ a platí-li $Q = q \cdot e^{f(2n+1)\pi}$ (n je počet ovinutí).

Řešení:

$$\ln Q = \ln Q - \ln 1000 + f(2n+1)\pi \Rightarrow n = \frac{1}{2} \left(\frac{\ln 1000}{f \cdot \pi} - 1 \right) = 2,798 \Rightarrow n \geq 3$$

20. Jakou tloušťku má materiál, který při zrentgenování snížil intenzitu prošlého RTG záření na polovinu. Pro intenzitu platí Lambertův zákon $I_1 = I_0 \cdot e^{-kt}$, kde I_1 je intenzita prošlého záření, I_0 je intenzita vstupujícího záření, t je tloušťka materiálu a k je koeficient absorpce. $k = 0,2 \text{ cm}^{-1}$.

Řešení:

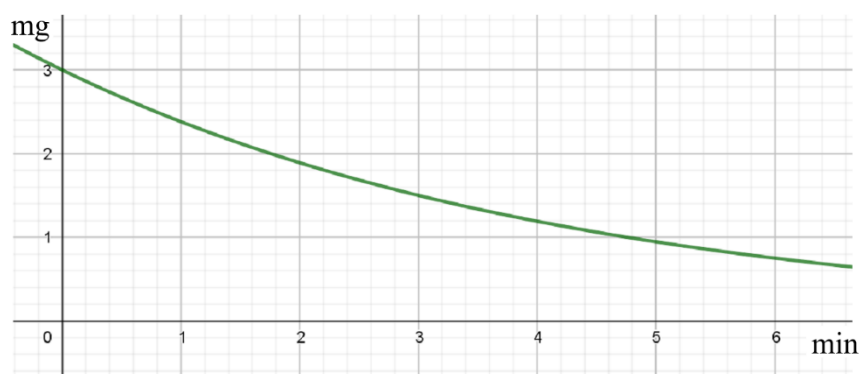
Po dosazení zadaných hodnot do Lambertova zákona řešíme rovnici, odtud: 3,47 cm.

21. Na počátku rozpadu jsme měli 3 mg radioaktivního radia. Poločas rozpadu $T = 3 \text{ min}$.

- Nakreslete graf závislosti množství radia na čase.
- Určete, za jak dlouho klesne množství radia na třetinu původního množství.

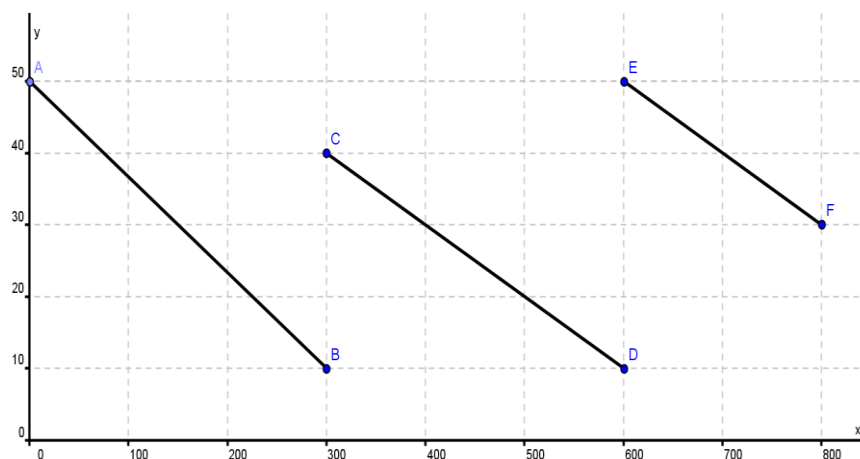
Řešení:

V učebnici fyziky nebo jiném informačním zdroji zjistíme funkci popisující radioaktivní rozpad (exponenciální funkce), po dosazení zadaných hodnot do funkčního vztahu sestojíme graf této funkce a určíme požadovanou dobu, odtud 4,76 min.



Graf 1. Funkce – příklad 21 – řešení

22. V grafu je znázorněna závislost množství paliva v nádrži v litrech (osa y) na počtu ujetých kilometrů (osa x).



Graf 2. Funkce – příklad 22 – zadání

- Co se stalo na třístém a šestistém kilometru?
- Určete průměrnou spotřebu automobilu v litrech na sto kilometrů v jednotlivých úsecích.
- Určete, kolik litrů paliva bylo v nádrži na pětistém kilometru.
- Určete, kolik litrů paliva bylo v nádrži při ujetí 200 km.
- Na kolikátém kilometru bylo v nádrži 30 litrů paliva.
- Sestavte předpis funkce závislosti množství paliva v nádrži na množství ujetých kilometrů pro první dva úseky grafu.

Řešení:

- Bylo doplňováno palivo v nádrži (tankování).
- Mezi nultým a třístým kilometrem: 40 l na 300 km což je $13, \bar{3}$ litrů na 100 km.
Mezi třístým a šestistým kilometrem: 30 l na 300 km, což je 10 l na 100 km.
Mezi šestistým a osmistým kilometrem: 20 l na 200 km, což je 10 l na 100 km.
- 20 l
- $50 - 26, \bar{6} = 23, \bar{3}$
- Na 150. km, 400. km a 800. km a dá se předpokládat, že také na 300. km a 600. km.
- Pro první úsek lze úkol řešit třemi způsoby:
 - Žák si uvědomí, že na počátku je v nádrži 50 litrů paliva a každých sto kilometrů se spotřebuje $13, \bar{3}$ litru paliva. Odtud okamžitě plyne: $y = 50 - \frac{13, \bar{3}}{100} \cdot x$.
 - Jedná se o lineární funkci s předpisem f: $y = ax + b$, kde víme, že koeficient b je průsečík grafu funkce s osou y. Tedy f: $y = ax + 50$. Koeficient a vypočítáme

po dosazení souřadnic bodu B z grafu do této rovnice $a = -\frac{40}{300} = -\frac{2}{15}$. Funkce

má tedy předpis $f: y = -\frac{2}{15}x + 50$

- Obecný, ale trochu pracný postup. Jedná se o lineární funkci s předpisem $f: y = ax + b$. Do této rovnice postupně dosadíme souřadnice bodů A a B z grafu funkce a vyřešíme soustavu dvou rovnic. Tento postup také použijeme pro druhý úsek.

Pro druhý úsek určíme předpis funkce ze vztahu pro lineární funkci $f: y = ax + b$ dosazením souřadnic bodů C a D grafu funkce. Dostaneme rovnice: $40 = a \cdot 300 + b$, $10 = a \cdot 600 + b$. Po vyřešení soustavy dostaneme $f: y = -0,1x + 70$

5 Rovnice a nerovnice

1. V dílně závodu se za směnu zpracovalo 85 m^2 plechu o celkové hmotnosti 380 kg. Jsou dva druhy plechu: 1 m^2 tenčího plechu má hmotnost 3 kg a 1 m^2 tlustšího má hmotnost 8 kg. Kolik m^2 každého druhu plechu se zpracovalo?

Řešení:

Tenčí plech má $x \text{ m}^2$, jeho hmotnost je $3 \cdot x \text{ kg}$, tlustší plech má $(85 - x) \text{ m}^2$ a má hmotnost $8 \cdot (85 - x) \text{ kg}$. Sestavíme rovnici $3x + 8 \cdot (85 - x) = 380$, odtud $x = 60$. Tenčího plechu bylo 60 m^2 a tlustšího plechu bylo 25 m^2 .

2. Pro přenos točivého momentu a výkonu spojkou platí vztah $M = 9,55 \cdot \frac{P}{n}$. Vypočítejte, kolik kW přenese při otáčkách $n = 280 \text{ min}^{-1}$ spojka zatížená momentem $M = 640 \text{ N.m}$.

Řešení:

$$P = \frac{M \cdot n}{9,55} = 18,76 \text{ kW}$$

3. Určete počet dílků stupnice nonia, o které je třeba otočit, aby se posuvem příčného suportu soustruhu přisunul nůž pro získání součástky s průměrem $d = 20 \text{ mm}$. Průměr polotovaru je $D = 24 \text{ mm}$ a velikost dělení stupnice $s = 0,04 \text{ mm}$.

Řešení:

$$\text{Hloubka záběru } t = \frac{D - d}{2}; \quad t = s \cdot x \Rightarrow s \cdot x = \frac{D - d}{2} \Rightarrow x = \frac{D - d}{2 \cdot s} = 50.$$

4. V dílně splnili roční plán produktivity práce na 103,8 %, a tím dosáhli zvýšení produktivity práce o 19,8 % ve srovnání s předchozím rokem. Vypočítejte, jaké zvýšení produktivity práce bylo naplánováno pro roční plán?

Řešení:

Produktivita práce na daný rok je $x \cdot z$ (z je produktivita v předešlém roce), skutečná produktivita práce je 1,038 plánované, tedy $1,038 \cdot x \cdot z$, proto platí $1,038 \cdot x \cdot z = 1,198 z$, $x = 1,154$, tedy plánované zvýšení bylo 15,4 %. Plánovaný vzrůst produktivity byl 15,4 %.

5. Jaké otáčky n může mít brusný kotouč s průměrem $d = 0,6 \text{ m}$, aby nebyla překročena jeho dovolená rychlost na obvodu $v = 25 \text{ m.s}^{-1}$.

Řešení:

$v = \frac{\pi \cdot d \cdot n}{60} \Rightarrow n = \frac{60 \cdot v}{\pi \cdot d} = 795 \text{ min}^{-1}$, zaokrouhleno dolů, maximální možné otáčky jsou tedy 795 min^{-1} .

6. Drát délky 100 cm se má ohnout do pravého úhlu tak, aby delší rameno bylo o 10 cm kratší než trojnásobek délky kratšího ramene. Určete délku ramen.

Řešení:

Kratší rameno: x (cm), pro delší rameno platí: $3x - 10 = 100 - x$, odtud: $x = 27,5$; kratší rameno 27,5 cm, delší rameno 72,5 cm

7. Hřídele vzdálené 300 mm se mají spojit ozubenými koly, jejichž průměry jsou v poměru 1 : 3. Vypočítejte průměry obou kol.

Řešení:

Součet průměrů obou kol je 600 mm. Průměr prvního kola je x mm, druhého kola $(600 - x)$ mm. Má platit $x : (600 - x) = 1 : 3$, odtud $x = 150$ mm. Průměry kol jsou 150 mm a 450 mm.

8. Kolikrát je třeba obtočit lano kolem železného válce, aby síla F_1 za pomoci tření udržela břemeno působící silou F_2 ? Závislost mezi silami je dána vzorcem $F_2 = F_1 \cdot 5^n$, kde n je počet obtočení lana kolem válce. $F_1 = 10 \text{ N}$ a $F_2 = 250 \text{ N}$.

Řešení:

$250 \leq 10 \cdot 5^n$, tedy $25 \leq 5^n$, proto $n \geq 2$

9. Z rovnice pro rovnováhu na páce $F \cdot a - Q \cdot b = 0$ vypočítejte:

- sílu F potřebnou ke zvedání břemene $Q = 240 \text{ N}$, je-li rameno síly $a = 560 \text{ mm}$ a rameno břemene $b = 75 \text{ mm}$;
- břemeno Q , působící na rameni $b = 45 \text{ mm}$, jestliže síla $F = 12 \text{ N}$ působí na rameni $a = 375 \text{ mm}$;
- rameno síly a , je-li síla $F = 7,5 \text{ N}$ a břemeno $Q = 48 \text{ N}$ působí na rameni $b = 35 \text{ mm}$.

Řešení:

$$\text{a) } F = \frac{Q \cdot b}{a} = 32,143 \text{ N}$$

$$\text{b) } Q = \frac{F \cdot a}{b} = 100 \text{ N}$$

$$\text{c) } a = \frac{Q \cdot b}{F} = 224 \text{ mm}$$

10. Jaké otáčky vřetena musí nastavit soustružník při obrábění válcové plochy hřídele z oceli 11 420 o průměru 50 mm, jestliže v tabulkách našel, že se má obrábět při řezné rychlosti $60 \text{ m} \cdot \text{min}^{-1}$?

Řešení:

Řezná rychlost je rychlost, s jakou se pohybuje nástroj po obráběné ploše. Řezná rychlost

$$v = \frac{\pi \cdot d \cdot n}{1000}, \text{ otáčky } n = \frac{1000 \cdot v}{\pi \cdot d}. \text{ Po dosazení zadaných hodnot: } n = 382 \text{ min}^{-1}.$$

11. Na tyč délky 6 m kruhového průřezu s průměrem $d = 2,4 \text{ cm}$ působí tahová síla F . Vypočítejte tuto sílu, je-li prodloužení tyče $\Delta l = 3,8 \text{ mm}$. (Prodloužení tyče se počítá podle Hookova zákona $\Delta l = \frac{F \cdot l}{E \cdot S}$, kde F je tahová síla, l je délka tyče, $E = 2,1 \cdot 10^{11} \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}$ je modul pružnosti a S je obsah průřezu.)

Řešení:

$$F = \frac{E \cdot S \cdot \Delta l}{l} = 60\,200 \text{ N}$$

12. Z rovnice $\sigma = \frac{F + S \cdot l \cdot \rho \cdot g}{S}$ vypočítejte obsah S průřezu čerpadlového táhla dlouhého $l = 6 \text{ m}$ a zatíženého silou $F = 2\,700 \text{ N}$, jestliže je dovolené napětí oceli $\sigma_D = 80 \text{ MPa}$, hustota $7\,800 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ a $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$?

Řešení:

$$S = \frac{F}{\sigma_D - l \cdot \rho \cdot g}. \text{ Pro zadané hodnoty } S = 33,9 \text{ mm}^2.$$

13. Určete počet otáček brusného kotouče o průměru 200 mm, jestliže obvodová rychlost nemá překročit 30 m/s .

Řešení:

$$30 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \geq \pi \cdot 0,2 \cdot f, \text{ tedy } f \leq \frac{30}{0,2 \cdot \pi} \text{ otáček za sekundu, což činí } 2865 \text{ otáček za minutu}.$$

14. Výrobní kapacita automatu A je p součástek za hodinu, výrobní kapacita automatu B je q součástek za hodinu.
- a) Jakou kapacitu musí mít automat C, aby jeho kapacita byla větší než kapacita automatů A i B dohromady?

- b) Jaký minimální počet automatů C je třeba, chceme-li jimi nahradit 5 automatů A a 6 automatů B?
- c) Jaký musí být výkon automatu C, abychom mohli čtyřmi automaty C nahradit výkon 5 automatů A a 6 automatů B?

Řešení:

- a) $x \geq p + q$
- b) Bude určitě stačit 6 automatů C.
- c) Chceme-li čtyřmi automaty C nahradit 5 automatů A a 6 automatů B, musí platit:
 $4x \geq 5p + 6q$. Tedy $x \geq (5p + 6q)/4$

15. Proveďte kontrolní výpočet pevnosti čepu nůžek na plech, který je namáhán silou $F = 800 \text{ N}$ (ve stříhu). Průměr čepu $d = 10 \text{ mm}$ a dovolené napětí ve stříhu $\sigma_{DS} = 5\,500 \text{ N.cm}^{-2}$. Podmínka bezpečné pevnosti ve stříhu je $F < S \cdot \sigma_{DS}$, kde S je průřez čepu.

Řešení:

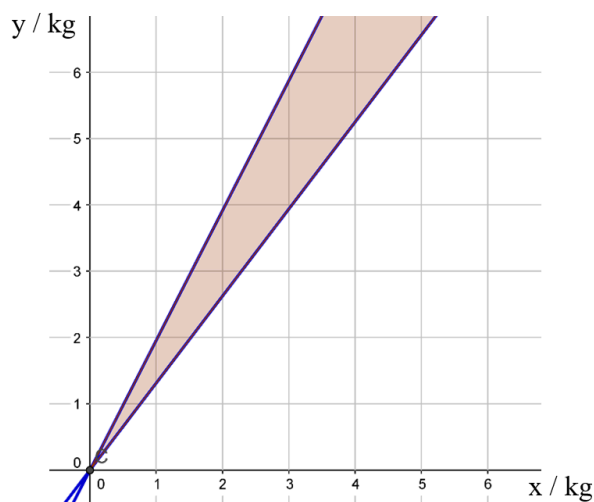
Průřez čepu $S = \frac{\pi \cdot d^2}{4} \Rightarrow F < \frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot \sigma_{DS}$ po dosazení dostaneme $800 \text{ N} < 4\,320 \text{ N}$. Čep nůžek namáhání vydrží.

16. Ve vaně, ve které jsme měli kalit ocelové součástky s teplotou 850°C , byla voda o teplotě 6°C . Kolik kilogramů vody y a kolik kilogramů součástek x musíme mít, aby se koncová teplota vody pohybovala mezi 50°C a 70°C . Zakreslete graf závislosti množství vody na množství součástek.

Řešení:

Při měrné kapacitě oceli 450 J/kg.K
a vody 4180 J/kg.K platí:

$$1,31x \leq y \leq 1,96x.$$



Graf 3. Rovnice a nerovnice – příklad 17 - řešení

17. Máme dva druhy ocelových úlomků. Jeden obsahuje 20 % a druhý 40 % niklu. Jaké množství úlomků jednotlivých druhů musíme smíchat při tavení, abychom získali ocel s obsahem niklu od 25 % do 30 %?

Řešení:

Hmotnost 20% oceli je x a hmotnost 30% oceli je y , tedy bude platit: $x/3 \leq y \leq x$.

18. Zámečník dostal za úkol vyrábět z plechu místo čtvercových podložek podložky obdélníkové, které mají délku o 4 cm a šířku o 3 cm menší než čtvercové podložky. Ušetří tak na jedné položce 1 dm² plechu. Vypočítejte rozměry nových podložek.

Řešení:

Původní podložky: čtverec o straně a , tedy $S_1 = a^2$

Nové podložky: obdélník o stranách $a - 4$, $a - 3$, tedy $S_2 = (a - 4) \cdot (a - 3)$.

Převědeme na stejné jednotky 1 dm² = 100 cm². Platí $S_1 - 100 = S_2$. Po dosazení $a^2 - 100 = a^2 - 4a - 3a + 12$, odtud $a = 16$ cm. Rozměry obdélníka $a - 4 = 12$ cm, $a - 3 = 13$ cm. Rozměry nových podložek jsou 12 cm a 13 cm.

19. Ocelové táhlo má zachytit tahovou sílu $F = 150\,800$ N. Jaký průměr musí mít kruhový průřez při dovoleném napětí v tahu $\sigma_D = 120$ N.mm⁻²? (pro napětí v tahu platí vztah $\sigma_D \cdot S = F$)

Řešení:

$$S = \frac{\pi \cdot d^2}{4} \Rightarrow d = \sqrt{\frac{4 \cdot F}{\pi \cdot \sigma_D}} = 40 \text{ mm}$$

Čepel lze zatížit silou $F = 48\,000$ N.

20. Prodloužíme-li stranu podložky tvaru čtverce o 5 mm, zvětší se její plošný obsah o 135 m². Jak dlouhá byla původní strana podložky?

Řešení:

původní strana	a	její obsah	$S = a^2$
zvětšená strana	$a + 5$	její obsah	$S_z = S + 135$
řešíme rovnici	$(a + 5)^2 = a^2 + 135$	délka strany	$a = 11 \text{ mm}$

Původní strana podložky byla 11 mm.

21. V kousku starého dřeva klesl obsah radionuklidu $^{14}_6\text{C}$ na 72 % původní hodnoty. Určete stáří dřeva, je-li poločas přeměny nuklidu 5 570 let a pro aktivitu zářiče platí vztah

$$A = A_0 \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{t}{T}}, \text{ kde } T \text{ je poločas přeměny a } A_0 \text{ původní aktivita zářiče.}$$

Řešení:

Asi 2 640 let.

22. Určete koeficient tření provazu na bubnu, jsou-li síly $P = 2\,900\text{ N}$ a $Q = 1\,500\text{ N}$ v rovnováze pro nastávající pohyb ve směru síly P , je-li $\alpha = \pi$ a platí-li rovnice $P = Q \cdot e^{f\alpha}$.

Řešení:

$$\ln P = \ln Q + f \cdot \alpha \Rightarrow f = \frac{\ln P - \ln Q}{\alpha} = 0,21$$

23. Na třecím bubnu zdvihadla je provaz, jehož jedním koncem se zvedá těleso Q a na druhém konci visí závaží $q = \frac{Q}{1\,000}$, aby bylo dosaženo dostatečného tření. Určete, kolikrát musí

být provaz ovinut, je-li koeficient smykového tření $f = \frac{1}{3}$ a platí-li $Q = q \cdot e^{f(2n+1)\pi}$

(n je počet ovinutí)

Řešení:

Za q dosadíme a upravíme na tvar vhodný k logaritmování: $Q = \frac{Q}{1\,000} \cdot e^{f(2n+1)\pi}$,

$$\ln Q = \ln Q - \ln 1\,000 + f(2n+1)\pi, n \cdot 2\pi \cdot f + \pi \cdot f = \ln 1\,000, n = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\ln 1\,000}{f \cdot \pi} - 1 \right) = 2,798,$$

$$n \geq 3$$

24. Určete průměr hřídele automobilu, který přenáší výkon 50 kW při otáčkách 3 000 ot/min. Dovolенý zkrut je $\vartheta = 0,3^\circ \cdot \text{m}^{-1}$, dovolené napětí v krutu $\tau_{\text{DK}} = 50\text{ MPa}$ a modul pružnosti ve smyku $G = 0,8 \cdot 10^8\text{ MPa}$. Pro výkon platí vztah $P = \frac{M_k \cdot n \cdot \pi}{30}$, kde P je výkon, n počet otáček za minutu a M_k točivý moment. Musí být splněna:

a) deformační podmínka: $\vartheta = \frac{M_k}{I_p \cdot G} \cdot \frac{180}{\pi}$, kde je polární moment setrvačnosti $I_p = \frac{\pi \cdot d^4}{32}$

b) podmínka pevnosti: $\frac{M_k}{0,2 \cdot d^3} < \tau_{\text{DK}}$

Řešení:

Ze vztahu pro výkon vypočítáme točivý moment: $M_k = \frac{P \cdot 30}{n \cdot \pi} = \frac{50\,000 \cdot 30}{3\,000 \cdot \pi} = 159,2 \text{ Nm}$

Z deformační podmínky určíme průměr hřídele:

$$I_p = \frac{M_k}{9 \cdot G} \cdot \frac{180}{\pi} = \frac{159,2}{0,3 \cdot 0,8 \cdot 10^{11}} \cdot \frac{180}{\pi} = 38 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4$$

$$d = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot I_p}{\pi}} = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 38 \cdot 10^{-8}}{\pi}} = 4,43 \text{ cm}$$

$$\text{Ověříme podmínku pevnosti: } \frac{159,2}{0,2 \cdot 0,0442^3} = 9,16 \cdot 10^6 < 50 \cdot 10^6$$

Průměr hřídele bude minimálně 4,5 cm.

25. Vzdálenost náprav nákladního automobilu je 3,7 m. Vypočítej zatížení jednotlivých náprav, jestliže se těžiště nákladu o hmotnosti 10 tun (100 kN) nachází 2 m od přední nápravy. Součin zatížení nápravy se vzdáleností od působíště výsledné síly musí být pro obě nápravy stejný.

Řešení:

Pro obě zatížení musí platit: $F_1 + F_2 = 100$ a $F_1 \cdot 2 = F_2 \cdot 1,7$. Vyřešením soustavy dostáváme 46 kN a 54 kN.

6 Planimetrie

1. Vypočítejte velikost průřezu litinového pravitka, který má tvar trojúhelníka se základnou 50 mm a výškou 24 mm.

Řešení:

$$S = \frac{Z \cdot V}{2} = 600 \text{ mm}^2 = 6 \text{ cm}^2$$

2. Jaký průřez má rohový svar ocelové konstrukce, má-li tvar pravoúhlého rovnoramenného trojúhelníka s délkou ramene 8 mm?

Řešení:

$$S = \frac{a^2}{2} = 32 \text{ mm}^2$$

3. Kolik m² plechu se spotřebuje na zhotovení 12 kusů plechových krytů, z nichž každý má tvar pravoúhlého rovnoramenného trojúhelníka s délkou ramene a = 0,68 m?

Řešení:

Složíme-li 2 pravoúhlé trojúhelníky přiložením přepon, dostaneme čtverec o straně a = 0,68 m. Z 12 kusů se vytvoří 6 takových čtverců. S = 2,77 m².

4. Z tabule měděného plechu, která má obsah 1,48 m², byla odštířena část tvaru pravoúhlého trojúhelníka s odvěsnami 0,9 m a 0,64 m.
- a) Jaký obsah měl zbytek tabule?
- b) O kolik % se zmenšil obsah tabule?

Řešení:

a) Obsah odštířené části $S = \frac{0,9 \text{ m} \cdot 0,64 \text{ m}}{2} = 0,288 \text{ m}^2$, zbytek tabule má obsah 1,192 m².

b) Obsah tabule se zmenší o 19,46 %.

5. Výrobní štítek pro firemní značku má tvar pravoúhlého rovnoramenného trojúhelníka s délkou ramena 54 mm.
- a) Kolik takových štítků lze vyrobit z tabule plechu o obsahu 0,75 m²?
- b) Kolik plechu se spotřebuje na 1 000 štítků?
- c) Kolik plechu se ušetří při výrobě 5 000 štítků, když zmenšíme jeho rameno o 5 mm?

Řešení:

- a) Asi 514 kusů.
- b) $1,458 \text{ m}^2$
- c) $1,2875 \text{ m}^2$

6. Průřez ocelové tyče má tvar čtverce se stranou 16 mm. Jaké zatížení připadá na 1 mm^2 průřezu, když tyč přenášela tahovou sílu 38 400 N?

Řešení:

$$S = 256 \text{ mm}^2, F = 150 \text{ N}$$

7. V izolační desce tvaru čtverce se stranou 0,75 m jsou kruhové otvory, dva s průměrem 150 mm a jeden s průměrem 90 mm. Vypočítejte obsah desky.

Řešení:

$$S = 5\,208 \text{ cm}^2$$

8. Kolik m ocelového úhelníku se spotřebuje na výztuhu plechových dveří tvaru obdélníka o šířce 1,05 m a výšce 1,85 m, je-li umístěna po obvodu a ve směru úhlopříček?

Řešení:

Délka úhlopříčky obdélníka $u = 2,13 \text{ m}$, délka výztuhy $l = 10,06 \text{ m}$. Je potřeba asi 10 m ocelového úhelníku.

9. Z tabule plechu 1,8 m dlouhé a 0,9 m široké zhotovili kryt tvaru rovnoramenného lichoběžníku se základnami $z_1 = 1,8 \text{ m}$, $z_2 = 1,4 \text{ m}$ a výškou $v = 0,84 \text{ m}$. Kolik % obsahu tabule se využilo?

Řešení:

Obsah obdélníkové tabule $S_1 = 1,62 \text{ m}^2$, obsah lichoběžníkového krytu $S_2 = 1,34 \text{ m}^2$, využilo se 83 % obsahu tabule.

10. Vypočítejte průřez mosazné tyče na výrobu matic, má-li tvar pravidelného šestiúhelníku se stranou 8 mm a poloměr jemu vepsané kružnice je 7 mm.

Řešení:

Průřez tyče tvoří 6 rovnoramenných trojúhelníků se základnou 8 mm a výškou 7 mm.

$$\text{Potom } S = 6 \cdot \frac{z \cdot v}{2}. S = 168 \text{ mm}^2$$

11. Z válcové tyče s průměrem 30 mm vyrobili šestihran s hranou 14 mm a poloměrem vepsané kružnice 12 mm. Kolik % činil odpad?

Řešení:

Obsah kruhu: $S_k = \frac{\pi \cdot d^2}{4} = 706,86 \text{ mm}^2$

Obsah šestiúhelníku: $S_u = 6 \cdot \frac{z \cdot \rho}{2} = 504 \text{ mm}^2$

Odpad činí: $S = S_k - S_u \Rightarrow S = 202,86 \text{ mm}^2 \Rightarrow 28,7 \%$

12. Na natření 1 m² plechu je zapotřebí 0,4 kg barvy. Jak velký kruhový kotouč lze natřít 15 kg barvy?

Řešení:

Vzhledem k tomu, že se na 1 m² spotřebuje 0,4 kg barvy, 15 kg barvy se spotřebuje na 37,5 m². Ze vzorce pro obsah kruhu $S = \frac{\pi \cdot d^2}{4}$ dostaneme, že průměr kruhového kotouče je 6,9 m.

13. Z plechu tvaru obdélníka s rozměry 1 m × 700 mm bylo vyříznuto 15 kruhových kotoučů s průměrem 200 mm. Vypočítejte, kolik plechu přišlo do odpadu. Kolik je to procent?

Řešení:

Obsah obdélníka $S = 0,7 \text{ m}^2$, obsah 15 kruhů $S_k = 0,471 \text{ m}^2$, odpad má obsah 0,229 m², což činí 32,71 %.

14. Jaký průřez má ocelová tyč s půlkruhovým profilem o poloměru 13 mm?

Řešení:

265 mm^2

15. Pružina s vnějším průměrem $D = 45 \text{ mm}$ obsahuje 125 závitů natočených těsně vedle sebe. Jaká je délka drátu při jeho zanedbatelném průměru?

Řešení:

$17,68 \text{ mm}$

16. Na přírubě je třeba narýsovat roztečnou kružnici o průměru 450 mm a na ni 16 středů děr pro šrouby. Jaká bude vzájemná vzdálenost středu děr (měřená na oblouku)?

Řešení:

88,36 mm

17. Ozubené kolo má 32 zubů s roztečí 37,7 mm. Jaký je průměr roztečné kružnice?

Řešení:

384 mm

18. Z plechu má být zhotovena vana, jejíž každá stěna je čtvercem o straně 675 mm. Kolik m² plechu se spotřebuje?

Řešení:

2,3 m²

19. Kolik kusů plechu s rozměry (200 × 300) mm lze nastříhat z tabule (1 000 × 2 000) mm? Určete zbytek plechu v dm². Kolik je to % z celé tabule?

Řešení:

33 kusů; 2 dm²; 1 %

20. Klempíř spotřeboval 120 m² plechu k pokrytí střechy 19 m × 5,9 m.

- a) Kolik m² měří střecha?
- b) Kolik % připadá na přehyby a odpad?
- c) Kolik tabulí 1 m × 2 m spotřeboval?

Řešení:

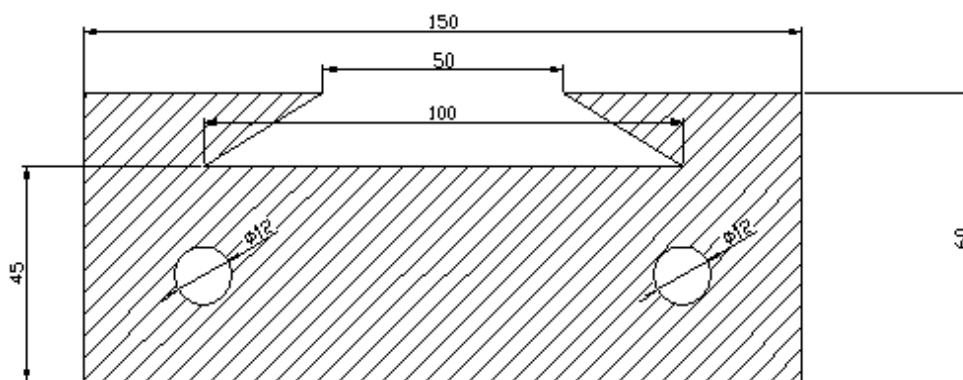
- a) 112,1 m²
- b) 7 %
- c) 60

21. Na jednostranné pocínování 1 m² plechu se spotřebuje 22 g cínu. Kolik kg cínu potřebujeme na oboustranné pocínování 100 kusů součástí tvaru rovnoběžníku o základně a = 205 mm a výšce v = 176 mm vyrobených z plechu o tloušťce 1 mm?

Řešení:

159 g

22. Vypočítejte obsah vyšrafované plochy (rozměry jsou uvedeny v milimetrech):

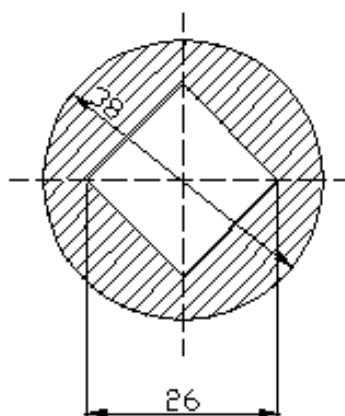


Obrázek 1. Planimetrie – příklad 22 – zadání

Řešení:

$$S = S_0 - S_L - 2 \cdot S_K = 60 \cdot 150 - \frac{100 + 50}{2} \cdot 15 - 2 \cdot \frac{\pi \cdot 12^2}{4} \approx 7\,649 \text{ mm}^2$$

23. Vypočítejte obsah vyšrafované plochy (rozměry jsou uvedeny v milimetrech):



Obrázek 2. Planimetrie – příklad 23 – zadání

Řešení:

$$S = S_K - S_{\check{c}} = 796 \text{ mm}^2$$

24. Výlisek má tvar kosodélníku o straně $a = 190 \text{ mm}$ a výšce $v = 100 \text{ mm}$. Jakou hmotnost má 300 výlisků, je-li hmotnost 1 m^2 použitého plechu 20 kg ?

Řešení:

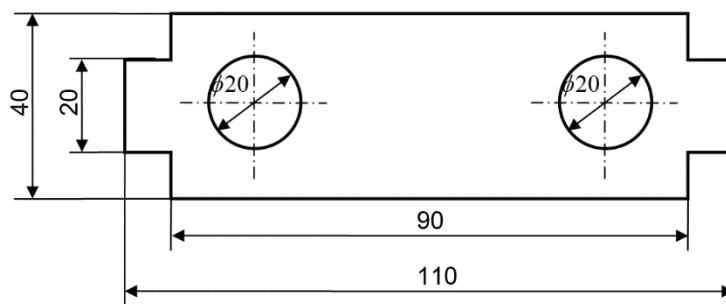
$$S = a \cdot v$$

Po dosazení zadaných hodnot:

$$300 \cdot S = 5\,700\,000 \text{ mm}^2 = 5,70 \text{ m}^2$$

$$m = 5,7 \cdot 20 \text{ kg} = 114 \text{ kg}$$

25. Vypočítejte množství barvy potřebné na obarvení 10 000 ks součástek z tenkého plechu, jestliže s 1 litrem barvy obarvíme 10 m^2 plochy.



Obrázek 3. Planimetrie – příklad 25 – zadání

Řešení:

$S = 67,43 \text{ m}^2$, což je asi 7 litrů.

26. Vypočítej rychlost odvíjení drátu z válcové tyče o průměru 20 mm, jestliže je počet otáček tyče 160 za minutu.

Řešení:

0,168 m/s

27. Táhl čtvercového profilu o straně $a = 30 \text{ mm}$ bude namáháno silou 90 000 N. Materiál táhla může být namáhán dovoleným napětím v tahu $\sigma = 300 \text{ MPa}$. Určete maximální průměr otvoru, který můžeme do táhla vyvrtat, aby nebyla porušena podmínka dovoleného napětí.

Řešení:

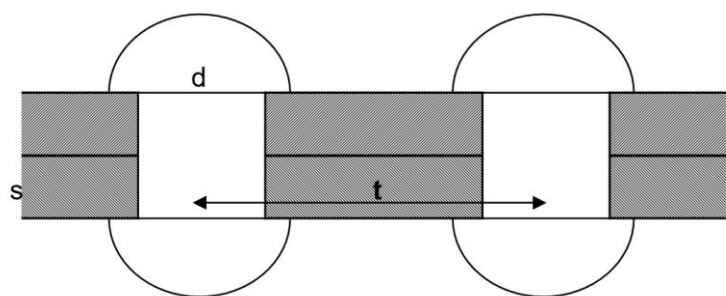
$D = 20 \text{ mm}$

28. Táhl kruhového profilu o průměru $D = 40 \text{ mm}$ bude namáháno silou 350 000 N. Materiál táhla může být namáhán dovoleným napětím v tahu $\sigma = 300 \text{ MPa}$. Určete průměr otvoru, který můžeme do táhla vyvrtat, aby nebyla porušena podmínka dovoleného napětí.

Řešení:

přibližně 2,25 mm

29. Při nýtování plechů je požadavek, aby se průřez zeslabeného plechu mezi dvěma nýty rovnal průřezu nýtu. Určete průměr nýtu, jestliže tloušťka plechu je 12 mm a vzdálenost středů nýtů je 40 mm.



Obrázek 4. Planimetrie – příklad 29 – zadání

Řešení:

$$(t - d)s = \frac{\pi d^2}{4}, \text{ tedy } \frac{\pi d^2}{4} + 12d - 480 = 0, \text{ odtud } d = 18,24 \text{ mm}$$

30. Síly $F_1 = 40 \text{ N}$, $F_2 = 60 \text{ N}$ působí v jednom bodě a jsou na sebe kolmé. Vypočítejte velikost jejich výslednice.

Řešení:

$$F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2} = 72,11 \text{ N}$$

31. Z tyče kruhového průřezu s poloměrem 25 cm se má vyfrézovat tyč, která má průřez pravidelného osmiúhelníku vepsaného do obvodové kružnice tyče. Vypočítejte délku strany osmiúhelníku.

Řešení:

$$\varphi = \frac{360^\circ}{16}, \quad a = 2r \cdot \sin \varphi, \quad a = 19,13 \text{ cm}$$

32. Nakloněná rovina svírá s vodorovnou rovinou úhel $\alpha = 18^\circ 30'$. Určete sílu F_1 rovnoběžnou s nakloněnou rovinou a sílu F_2 kolmou k nakloněné rovině, na které se rozkládá síla G tělesa na této rovině. $G = 5\,200 \text{ N}$.

Řešení:

$$F_1 = G \cdot \sin \alpha = 1\,649,98 \text{ N}$$

$$F_2 = G \cdot \cos \alpha = 4\,931 \text{ N}$$

33. Jaké úhly svírají síly $F_1 = 400 \text{ N}$, $F_2 = 600 \text{ N}$, $F_3 = 800 \text{ N}$, které jsou v rovnováze?

Řešení:

$$F_1^2 = F_2^2 + F_3^2 - 2 \cdot F_2 \cdot F_3 \cdot \cos \alpha' \Rightarrow \alpha' = 28^\circ 57'$$

$$F_2^2 = F_1^2 + F_3^2 - 2 \cdot F_1 \cdot F_3 \cdot \cos \beta' \Rightarrow \beta' = 46^\circ 34'$$

Úhel F_1F_2 má velikost $75^\circ 31'$, úhel F_1F_3 má velikost $133^\circ 26'$, úhel F_2F_3 má velikost $151^\circ 3'$.

34. Na hmotný bod působí dvě síly, $P = 200 \text{ N}$ a $Q = 350 \text{ N}$, které svírají úhel 75° . Určete výslednici sil F a úhel, který svírá se silou P .

Řešení:

$$F = \sqrt{P^2 + Q^2 - 2 \cdot P \cdot Q \cdot \cos(180^\circ - \alpha)} = 445,8 \text{ N}$$

$$\sin \beta = \frac{Q}{F} \cdot \sin(180^\circ - \alpha) \Rightarrow \beta = 49^\circ 19'$$

35. Na hmotný bod působí síly $P = 300 \text{ N}$ a $Q = 240 \text{ N}$. Jejich výslednice $F = 120 \text{ N}$. Určete úhel, který svírají síly P , Q , a úhel, který svírá výslednice F se silou P .

Řešení:

$$\cos \beta = \frac{P^2 + F^2 - Q^2}{2 \cdot P \cdot F} \Rightarrow \beta = 19^\circ 27'$$

$$\cos \alpha = \frac{P^2 + Q^2 - F^2}{2 \cdot P \cdot Q} \Rightarrow \alpha = 157^\circ 40'$$

36. Tři síly, $F_1 = 10 \text{ N}$, $F_2 = 20 \text{ N}$, $F_3 = 27 \text{ N}$, působí na těleso v témž bodě v jedné rovině a jsou v rovnováze. Vypočítejte úhly, které jednotlivé síly svírají navzájem.

Řešení:

$$\text{Úhel } F_1F_3 \dots \alpha, \text{ úhel } F_2F_3 \dots \beta, \text{ úhel } F_1F_2 \dots \varepsilon = 360^\circ - (\alpha + \beta)$$

$$\alpha = 142^\circ 36', \beta = 162^\circ 19', \varepsilon = 55^\circ 5'$$

37. Výslednice stejně velkých sil, které svírají úhel 45° , je 30 N . Vypočítejte velikost těchto sil.

Řešení:

$$\frac{F}{2} = F_1 \cdot \cos \frac{\alpha}{2} \Rightarrow F_1 = \frac{F}{2 \cdot \cos \frac{\alpha}{2}} \Rightarrow F_1 = 16,24 \text{ N}$$

38. Na automatické lince je součástka o tíze 1200 N zvedána dopravníkem a na dráze 3 m je překonáván výškový rozdíl 1 m . Vypočítej tažnou sílu dopravníku.

Řešení:

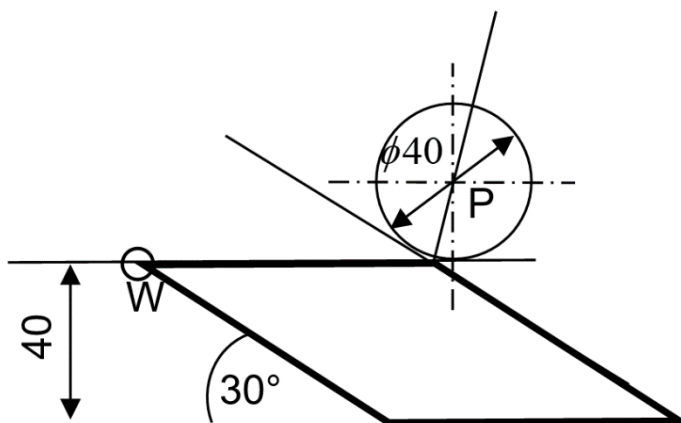
400 N

39. Vypočítejte upínací sílu klínu, jestliže je klín narážen silou 400N a úkos klínu je 1 : 150.

Řešení:

60 kN

40. Vypočítejte souřadnice rohového bodu P dráhy nástroje při frézování kosočtverečného tvaru. W je nulový bod obrobku. Osa Y je svislá a osa X je vodorovná.



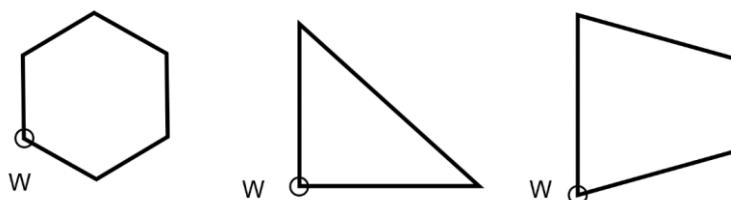
Obrázek 5. Planimetrie – příklad 40 – zadání

Řešení:

Případná pomoc vzorci: $\Delta X = \frac{D}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$

Strana kosočtverce je 80 mm. $X = 80 + 20 \cdot \operatorname{tg} 15^\circ = 85,359$; $Y = 20$.

41. Vypočítejte souřadnice rohových bodů dráhy nástroje při frézování. W je nulový bod obrobku. Průměr kotouče frézky je 30 mm. Strana pravidelného šestiúhelníku je 100 mm. Odvěsny pravoúhlého rovnoramenného trojúhelníka měří 150 mm. Rovnoběžné strany rovnoramenného lichoběžníku měří 200 mm a 100 mm a obě ramena měří shodně 160 mm.



Obrázek 6. Planimetrie – příklad 41 – zadání

Řešení:

Po směru hodinových ručiček.

šestiúhelník:

$$X_0 = -15; \quad Y_0 = -8,660; \quad X_1 = -15; \quad Y_1 = 108,660; \quad X_2 = 86,603; \quad Y_2 = 167,321;$$

$$X_3 = 188,205; \quad Y_3 = 108,660; \quad X_4 = 188,205; \quad Y_4 = -8,660; \quad X_5 = 86,603; \quad Y_5 = -67,321;$$

trojúhelník:

$$X_0 = -15; \quad Y_0 = -15; \quad X_1 = -15; \quad Y_1 = 186,213; \quad X_2 = 186,213; \quad Y_2 = -15;$$

lichoběžník:

$$X_0 = -15; \quad Y_0 = -20,725; \quad X_1 = -15; \quad Y_1 = 180,725; \quad X_2 = 166,987; \quad Y_2 = 160,856;$$

$$X_3 = 166,987; \quad Y_3 = 39,144;$$

42. Určete otáčky kola automobilu F1 o průměru 66 cm při rychlosti 300 km/h.

Řešení:

$$300 \text{ km/h} = 300 : 3,6 \text{ m/s} = 83,3 \text{ m/s. Obvod kola je } \pi \cdot 0,66 = 2,07 \text{ m.}$$

Otáčky jsou $83,3 : 2,07 = 40,2$ otáček za sekundu.

7 Stereometrie

1. Měděná deska z plechu o tloušťce 3 mm má délku 0,9 m a šířku 0,75 m. Kolik kg mědi obsahuje, je-li hustota mědi $8\,800\text{ kg.m}^{-3}$?

Řešení:

17,8 kg

2. Jakou hmotnost má železná tyč ($\rho = 7\,800\text{ kg.m}^{-3}$) 1 m dlouhá, jejíž průřez je čtverec se stranou $a = 45\text{ mm}$?

Řešení:

15,8 kg

3. Jak dlouhý vývalek čtvercového průřezu se stranou $s = 180\text{ mm}$ bude potřebný k vykování desky o šířce $a = 250\text{ mm}$, tloušťce $b = 100\text{ mm}$ a délce $c = 800\text{ mm}$, počítáme-li s 3% opalem?

Řešení:

Opal je úbytek objemu při tepelném zpracování vývalku, objem kovové desky tvoří 97 % objemu vývalku.

$$V_v = \frac{V_d}{0,97} = \frac{250 \cdot 100 \cdot 800}{0,97} \text{ mm}^3 = 20\,618\,556 \text{ mm}^3 = 20\,619 \cdot 10^3 \text{ mm}^3$$

$$\text{Délka vývalku: } l = \frac{V_v}{s^2} = 637 \text{ mm (zaokrouhleno nahoru)}$$

4. Plechový buben pro odsávací zařízení má tvar pláště válce s průměrem 1 m a výškou 1,6 m. Jakou má hmotnost, je-li z plechu o tloušťce 1,5 mm a hustotě $7\,800\text{ kg.m}^{-3}$?

Řešení:

58,8 kg

5. Vyjádřete nejmenší průměr D_z válcového polotovaru, ze kterého je třeba frézováním zhotovit čtyřhran čtvercového průřezu se stranou a . Čemu je roven objem V_s ubrané třísky při délce polotovaru l ?

Řešení:

D – průměr kruhové podstavy válce

V_z – objem válcového polotovaru

V_s – objem třísky

V_C – objem čtyřhranu

$$D = a \cdot \sqrt{2}$$

$$V_s = V_z - V_c = \left(\frac{\pi \cdot D^2}{4} - a^2 \right) \cdot l = 0,57a^2 \cdot l$$

6. Z bronzového válce s průměrem 30 mm a délkou 62 mm se má zhotovit pouzdro tvaru dutého válce s rozměry $d = 20$ mm, $D = 28$ mm a $l = 60$ mm. Kolik % bude tvořit odpad?

Řešení:

58,7 %

7. Určete tloušťku mosazné trubičky ($\rho = 8\,500 \text{ kg.m}^{-3}$), která má délku 600 mm, vnější obvod 32 mm a hmotnost 94,956 g.

Řešení:

Obvod trubičky: $o = \pi \cdot D \Rightarrow D = \frac{o}{\pi} = 10,19 \text{ mm}$

Hmotnost trubičky: $m = V \cdot \rho \Rightarrow V = \frac{m}{\rho}$

Objem dutého válce: $V = \frac{\pi \cdot (D^2 - d^2)}{4} \cdot l \Rightarrow d = \sqrt{D^2 - \frac{4 \cdot V}{\pi \cdot l}} = 8,96 \text{ mm}$

Tloušťka trubičky: $t = \frac{D - d}{2} = 0,619 \text{ mm}$

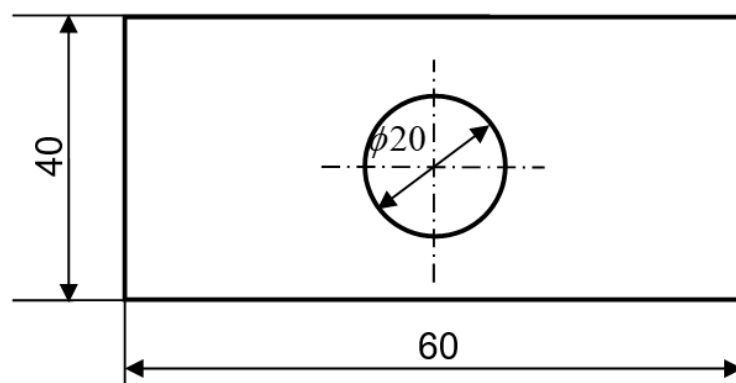
8. Chceme soustružit kužel o průměrech 40 mm a 25 mm, délky 20 mm. Vypočítejte kuželovitost a úkos kužele a úhel nastavení $\alpha/2$. Kuželovitost vypočítáme podle vzorce

$$k = \frac{D - d}{l} \text{ a úkos podle vzorce } S = \frac{k}{2}. \text{ Úhel nastavení podle vzorce } \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = S.$$

Řešení:

Jedná se o komolý kužel, $k = \frac{3}{4}$, $S = \frac{3}{8}$, $\frac{\alpha}{2} = 20,556^\circ$

9. Vypočítejte hmotnost 1000 ks součástek (viz obrázek) vyrobených z ocelového plechu tloušťky 2 mm. Hustotu oceli vyhledejte.



Obrázek 7. Stereometrie – příklad 9 – zadání

Řešení:

$V = 4172 \text{ mm}^3$, při $\rho = 7850 \text{ kg/m}^3$ je $m = 32,7 \text{ kg}$

10. Nádobu ve tvaru kužele má mít hloubku 10 cm. Jaký bude poloměr podstavy, aby její objem byl 1 litr?

Řešení:

$r = 9,77 \text{ cm}$

11. Sestavte vztah pro závislost ceny c Kč běžného metru hřídele o průměru d , jestliže 1 dm^3 hřídele stojí a Kč a 1 dm^2 opracované plochy (krajní kruhové plochy se neopracovávají) stojí b Kč. Vypočítejte průměr d hřídele ze zadaných parametrů ($c = 1420 \text{ Kč}$, $a = 60 \text{ Kč}$, $b = 30 \text{ Kč}$).

Řešení:

$$c = \frac{a \cdot 10 \cdot \pi \cdot d^2}{4} + b \cdot 10 \cdot \pi \cdot d \Rightarrow d = 1 \text{ dm}$$

12. Po vypálení se objem keramické dlaždice zmenší o 22 %. Určete původní rozměry formy, chceme-li vyrobit čtvercovou dlaždici o straně 20 cm a tloušťce 5 mm.

Řešení:

21,73 cm a tloušťka 5,43 mm

13. Kužel má mít objem 10 litrů a jeho výška a průměr podstavy jsou stejné. Určete jeho rozměry.

Řešení:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot v \text{ a platí } v = 2 \cdot r. \text{ Tedy } 10 = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 2r^3. \quad r = \sqrt[3]{\frac{15}{\pi}} = 1,68 \text{ dm}$$

14. Vypočítejte objem složeného tělesa, pro nějž platí vzorec: $V = \frac{v}{3} \cdot \left(\pi \cdot r^2 - \frac{r \cdot v}{9} \right)$, je-li $r = 20 \text{ mm}$ a $v = 3 \text{ cm}$.

Řešení:

$$4\pi - \frac{2}{3} = 11,9 \text{ cm}^3$$

15. Vypočítejte hmotnost nýtu, který má plochou kulovou hlavu (ve tvaru kulové vrstvy), je-li průměr hlavy 30 mm, výška hlavy 9 mm, dřík (válcová noha) má průměr 15 mm a délku 40 mm. (Hustota železa je $7\,800 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$.)

Řešení:

$$r_2 = \sqrt{r_1^2 - v^2} = 12 \text{ mm}$$

$$V = \pi \cdot r^2 \cdot v + \frac{\pi \cdot v}{6} \cdot (3r_1^2 + 3r_2^2 + v^2) \Rightarrow V = 12\,666,902 \text{ mm}^3$$

$$m = V \cdot \rho \Rightarrow m = 98,8 \text{ g}$$

16. Na hmotný bod působí tři navzájem kolmé síly $F_1 = 9 \text{ N}$, $F_2 = 8 \text{ N}$, $F_3 = 12 \text{ N}$. Určete výslednici sil F a úhly, které svírá se složkami F_1 , F_2 , F_3 . (Výslednice F je tělesová úhlopříčka kváдру, jehož rozměry jsou složky F_1 , F_2 , F_3 vyjádřené úsečkami.)

Řešení:

$$F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + F_3^2} = 17 \text{ N}$$

$$\text{úhel } F_1F = \alpha$$

$$\text{úhel } F_2F = \beta$$

$$\text{úhel } F_3F = \gamma$$

$$\cos \alpha = \frac{F_1}{F} \Rightarrow \alpha = 58^\circ 2'$$

$$\cos \beta = \frac{F_2}{F} \Rightarrow \beta = 61^\circ 56'$$

$$\cos \gamma = \frac{F_3}{F} \Rightarrow \gamma = 45^\circ 6'$$

17. Jaká je hmotnost železné tyče ($\rho = 7\,800 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$) o délce 1 m, jejímž průřezem je čtverec o straně $a = 45 \text{ mm}$?

Řešení:

$$m = V \cdot \rho = a^2 \cdot l \cdot \rho = 0,045^2 \cdot 1 \cdot 7\,800 = 15,795 \text{ kg}$$

8 Analytická geometrie v rovině

- Osový řez reflektoru je parabola. Napište její rovnici (při vhodných osách x a y), je-li hloubka reflektoru $h = 20$ cm a jeho šířka $d = 20$ cm, a určete souřadnice ohniska, ve kterém bude vlákno žárovky.

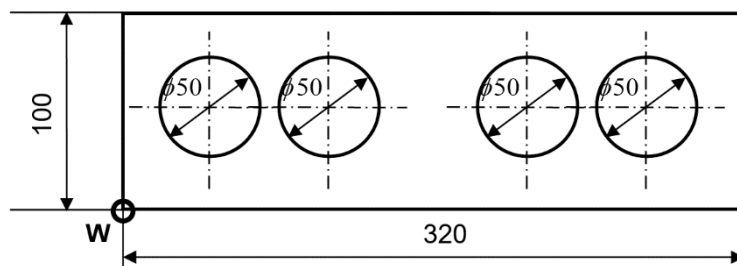
Řešení:

$$y^2 = 2 \cdot p \cdot x \Rightarrow 100 = 2 \cdot p \cdot 20 \Rightarrow p = \frac{5}{2}$$

$$y^2 = 5x$$

$$\frac{p}{2} = \frac{5}{4} \Rightarrow F\left[\frac{5}{4}; 0\right]$$

- Vypočítejte souřadnice otvorů s vyznačeným nulovým bodem W . Otvory musí být umístěny symetricky vzhledem ke středu desky. Střed dvou bližších otvorů jsou od sebe vzdáleny 60 mm. Střed krajních otvorů musí být vzdáleny od okraje desky 50 mm.



Obrázek 8. Analytická geometrie v rovině – příklad 2 - zadání

Řešení:

$$X_1 = 50; Y_1 = 50; X_2 = 110; Y_2 = 50; X_3 = 210; Y_3 = 50; X_4 = 270; Y_4 = 50$$

- Vypočítejte souřadnice deseti otvorů na obdélníkové desce o rozměrech 20 mm a 110 mm, jestliže jejich středy mají rozdělit úhlopříčku na 11 stejných částí.
 - Nulový bod W leží v rohu desky a na úhlopříčce s otvory.
 - Nulový bod W leží v rohu desky, mimo úhlopříčku s otvory.

Řešení:

- Body leží na přímce $Y = 2X/11$

Tabulka 2. Analytická geometrie v rovině – příklad 3 – řešení

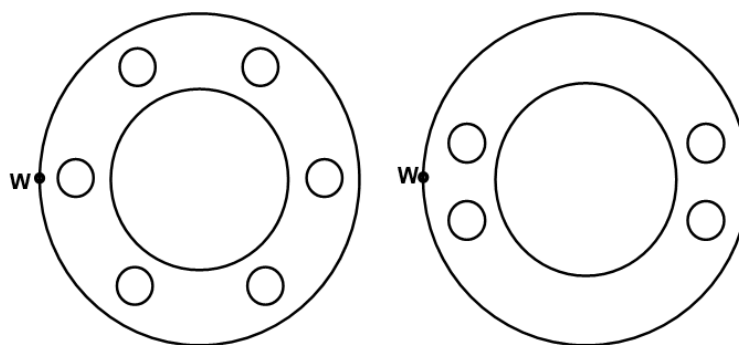
X	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
Y	1,818	3,636	5,455	7,273	9,091	10,909	12,727	14,545	16,364	18,182

- b) Body leží na přímce $Y = 20 - 2X/11$

Tabulka 3. Analytická geometrie v rovině – příklad 3 – řešení

X	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
Y	18,182	16,364	14,545	12,727	10,909	9,091	7,273	5,455	3,636	1,818

4. Kruhová příruba má vnější průměr 140 mm a vnitřní průměr 80 mm. Nulový bod W je na vnějším okraji kruhové příruby.
- a) Najděte souřadnice šesti otvorů, které jsou symetricky rozloženy přesně uprostřed mezikruží.
- b) Najděte souřadnice čtyř otvorů, které se nachází uprostřed mezikruží a leží ve vrcholech obdélníka o straně 40 mm.



Obrázek 9. Analytická geometrie v rovině – příklad 4 – zadání

Řešení:

- a) Body leží na kružnici se středem $S[70; 0]$ a poloměrem 55 mm.

Tabulka 4. Analytická geometrie v rovině – příklad 4 – řešení

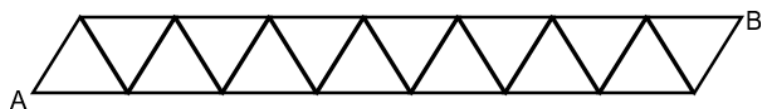
X	15	42,5	97,5	125	97,5	42,5
Y	0	47,631	47,631	0	- 47,631	- 47,631

- b) Body leží na kružnici $(X - 70)^2 + Y^2 = 3\,025$.

Tabulka 5. Analytická geometrie v rovině – příklad 4 – řešení

X	18,765	121,235	18,765	121,235
Y	20	20	- 20	- 20

5. Vypočítejte vzdálenost bodů A a B na ocelové konstrukci na obrázku, smontované z 29 stejně dlouhých dílů, jestliže délka jednoho dílu je 1 m. Jak dlouhé by musely být všechny díly, aby vzdálenost bodů A a B byla 20 m?

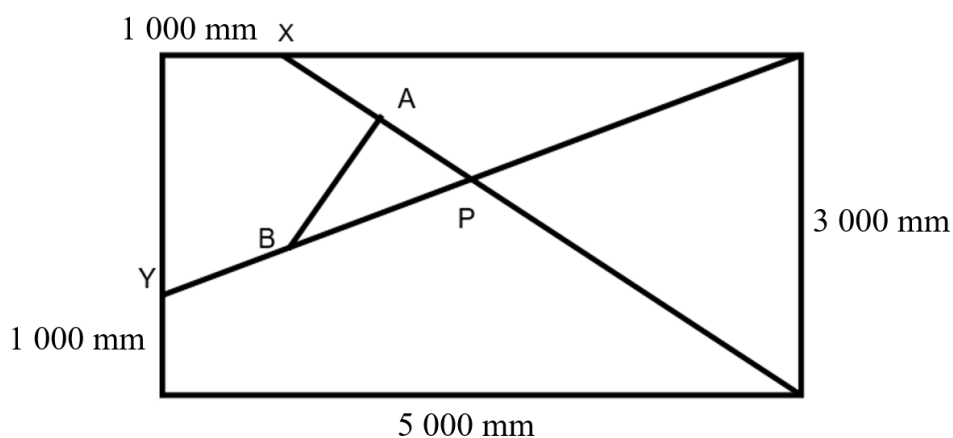


Obrázek 10. Analytická geometrie v rovině – příklad 5 – zadání

Řešení:

7,550 m; 2,649 m

6. Vypočítejte délku vzpěry mezi body A a B, které se nachází ve středu úseků XP a YP, a velikost úhlu APB (viz obrázek).



Obrázek 11. Analytická geometrie v rovině – příklad 6 – zadání

Řešení:

$\sqrt{1,25} = 1,118 \text{ m} ; 58,67^\circ$

9 Posloupnosti

1. Šestistupňová řemenice má nejmenší průměr $d_1 = 80$ mm a největší $d_6 = 280$ mm. Určete průměry ostatních kotoučů, tvoří-li aritmetickou posloupnost.

Řešení:

120, 160, 200, 240

2. Zaměstnanci mají srovnat trubky do vrstev. Spodní vrstva bude obsahovat 30 kusů a horní vrstva 15 kusů. Kolik trubek je složeno v dané hromadě?

Řešení:

$$a_1 = 30, a_n = 15, d = -1,$$

$$s_n = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n), a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$$

$$n = 16, s = 360$$

3. Stupňová řemenice dává 9 stupňů otáček, které tvoří geometrickou posloupnost. Nejmenší je 30 ot./min, největší 129 ot./min. Vypočítejte kvocient.

Řešení:

$$q = 1,2$$

4. Čtyři stupně otáček vrtačky tvoří geometrickou posloupnost. Nejmenší je 300 ot./min. Vypočítejte největší počet otáček, je-li kvocient 1,5.

Řešení:

$$1\ 013$$

5. Kolik rychlostí bude mít vrtačka, má-li mít nejmenší rychlost 15 otáček a největší 480 otáček za minutu, je-li podíl dvou sousedních rychlostí 2?

Řešení:

$$a_1 = 15, q = 2, a_n = 480, a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \Rightarrow n = 6$$

6. Soustruh dává pět stupňů otáček, které tvoří geometrickou posloupnost. Nejmenší je 4 ot./min. Vypočítejte ostatní, je-li kvocient 1,3.

Řešení:

$$5,2; 6,76; 8,79; 11,42$$

7. Obecný kladkostroj má 5 kladek, každou s účinností $e = 0,8$. Kladkostrojem zvedáme břemeno $Q = 1\,200\text{ N}$. Vypočítejte sílu P ze vzorce $Q = P \cdot (e + e^2 + e^3 + \dots + e^n)$

Řešení:

$$P = 446\text{ N}$$

8. Jedním protažením se zmenší průměr drátu na 95 %. Má-li drát průměr 6 mm, jaký bude jeho průměr po 5 protaženích?

Řešení:

$$r = 1 - \frac{5}{100} = 0,95; \quad a_5 = a_0 \cdot r^5 = 6 \cdot 0,95^5 = 4,64; \quad r = 4,64\text{ mm}$$

10 Kombinatorika

1. Z kolika možných typů šroubů si můžeme vybrat, máme-li k dispozici pro každý šroub 6 možných formátů, dva různé typy povrchů (lesklý a matný) a tři různé barvy (žlutou, černou a šedou)?

Řešení:

$$6 \cdot 2 \cdot 3 = 36$$

2. Kolika způsoby můžeme sestavit linku složenou z výrobního stroje, dopravníku a balicího stroje, jestliže máme k dispozici 3 výrobní stroje, 5 dopravníků a 4 balicí stroje. Kolik z možných sestav by bylo nefunkčních, jestliže vstupní kontrola nebyla důsledná a jeden balicí stroj je vadný?

Řešení:

Ke každému použitému výrobnímu stroji můžeme připojit některý dopravník a k němu pak některý balicí stroj: $3 \cdot 5 \cdot 4 = 60$. Máme tedy 60 způsobů.

Počet vadných sestav: $3 \cdot 5 \cdot 1 = 15$. Vadných bude 15 sestav, tedy čtvrtina celkového počtu způsobů zapojení.

3. Kolika způsoby můžeme sestavit stroj, máme-li k dispozici 3 řídicí jednotky, 4 pohonné jednotky, 5 stojanů a 7 těl stroje? Kolik sestav bude vadných, jestliže u každé komponenty je právě jeden vadný kus?

Řešení:

Ke každé použité řídicí jednotce můžeme přiřadit některou pohonnou jednotku a k ní pak některý stojan a k němu tělo stroje: $3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 7 = 420$. Máme tedy 420 způsobů.

Počet vadných sestav určíme tak, že nejprve určíme počet fungujících sestav, sestavy jen z dobrých komponent: $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6 = 144$.

Vadných bude $420 - 144 = 276$ sestav.

4. V bedně je 18 šroubů a 16 matic. Kolika způsoby lze vybrat 7 výrobků, aby mezi nimi byly:
 - a) 4 šrouby a 3 matice
 - b) 6 šroubů a 1 matice?

Řešení:

Protože nezáleží na pořadí prvků, jedná se o kombinace.

a) $\binom{18}{4} \cdot \binom{16}{3} = 1\,713\,600$ způsobů

b) $\binom{18}{4} \cdot \binom{16}{1} = 297\,024$ způsobů

5. Podnikatel zjistil, že 10 nabízených výrobků splňuje jeho kritéria. Z těchto 10 výrobků má určit 3, včetně pořadí, které stanoví jejich preferenci. Kolika způsoby to může provést?

Řešení:

$$V_3(10) = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$$

6. Kolik existuje devítimístných výrobních čísel stroje, které mají na prvním místě číslici 3 nebo 5 a poslední trojčíslí je složeno jen ze sudých číslic?

Řešení:

Na posledních třech místech hledaného devítimístného výrobního čísla může být jen jedna z pěti číslic 0, 2, 4, 6 a 8. Na prvním místě mohou být 2 číslice, a to 3 nebo 5. Na ostatních místech může být libovolná z desíti číslic, tedy 0 až 9.

Takže ke každé ze dvou číslic na prvním místě čísla můžeme přiřadit libovolnou číslici z deseti číslic na druhém místě čísla a k ní můžeme přiřadit libovolnou číslici z deseti číslic na třetím místě čísla a tak dále, až na sedmém až devátém místě můžeme přiřadit jen jedno z pěti (sudých čísel).

Výsledek: $2 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 25\,000\,000$

7. Řemeslník má v obchodě koupit 2 konzoly a 10 šroubů. Kolika způsoby může realizovat tento nákup do svého košíku, jestliže konzoly vybírá z regálu, kde je jich 10, a šrouby z krabice s dvaceti kusy?

Řešení:

Protože nezáleží na pořadí, v jakém konzoly do košíku vybere, jedná se o kombinace, a počet možností tedy je: $\binom{10}{2} = 45$

Pro počet možných nákupů šroubů platí: $\binom{20}{10} = \frac{20!}{10! \cdot 10!} = 184\,756$

Protože ke každé konzole můžeme přidat do košíku jeden z deseti šroubů, pak celkový počet nákupů získáme tak, že vynásobíme jednotlivé počty možností.

Tedy: $45 \cdot 184\,756 = 8\,314\,020$

8. Kolika způsoby lze při kontrole jakosti vybrat 6 výrobků z 10 předložených?

Řešení:

$$\binom{10}{6} = \binom{10}{4} = \frac{10!}{4! \cdot 6!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 210$$

9. Mistr má určit práci pro 3 obráběče na jednu směnu. Má k dispozici 6 CNC strojů. Kolika způsoby může přidělit stroje, jestliže jeden obráběč obsluhuje celou směnu dva stroje?

Řešení:

První pracovník dostane přiděleny dva stroje ze šesti. K této dvojici může být přidělena libovolná dvojice ze čtyř zbývajících strojů a poslední dva stroje zbývají pro třetího

pracovníka $\binom{6}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{2}{2} = 90$.

10. Kolika způsoby můžeme rozmístit 7 pracovníků k sedmi strojům? Kdybychom každý den chtěli rozmístit dělníky jinak, jak dlouho by trvalo, než by se rozmístění začalo opakovat?

Řešení:

Jestliže si označíme pracovníky písmeny A, B, C, D, E, F, G, může být u prvního stroje pracovník A až G, tedy 7 možností. Na druhém místě už jen 6 pracovníků (jeden je už umístěn u 1. stroje), u třetího stroje jen pět pracovníků a tak dále, až poslední stroj zbude pro posledního pracovníka.

Celkem: $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5\,040$, resp. $V(7,7) = 5\,040$

$$5\,040 : 365 = 13,8$$

$$5\,040 : 250 = 20,16$$

Pracovníky můžeme rozmístit 5040 způsoby. Rozmístění by se začalo opakovat po téměř 14 letech v případě, že by pracovali i o sobotách i nedělích a svátcích. V případě práce jen v pracovní dny, při počtu 250 pracovních dnů v roce, by opakování začalo za 20 let.

Můžeme možnosti naznačit do tabulky:

Tabulka 6. Kombinatorika – příklad 10 – řešení

1. stroj	2. stroj	3. stroj	4. stroj	5. stroj	6. stroj	7. stroj
A	B	C	D	E	F	G
					G	F
				F	E	G
					G	E
			E	G	E	F
					F	E
						
		D	F			
			G			
						
						
		F				
		G				
	C					
						
	G					
B						
C						
D						
E						
F						
G						

11. Mistr má sestavit rozpis práce pro 5 pracovníků. Má k dispozici dva soustruhy, dvě frézy a vrtačku.

- Kolika způsoby může rozdělit práci v jednom dnu (jedné směně), jestliže jeden pracovník bude obsluhovat jeden stroj po celou směnu?
- Kolika způsoby může rozdělit práci na týden?
- Sestavte aspoň jeden rozpis práce pro 5 pracovníků na týden (5 směn) tak, aby se všichni pracovníci vystřídali na všech strojích a strávili na všech strojích stejný čas.
- Kolika způsoby může mistr rozdělit práci na týden, aby každý pracovník strávil na každém stroji právě jednu nedělenou směnu?

Řešení:

- Počet možností pro jeden den: $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$
- Počet možností za týden: $120 \cdot 120 \cdot 120 \cdot 120 \cdot 120 = 24\,883\,200\,000$

c)

Tabulka 7. Kombinatorika – příklad 11 – řešení

Den v týdnu	Pracovník číslo				
	Soustruh 1	Soustruh 2	Fréza 1	Fréza 2	Vrtačka
Po	1	2	3	4	5
Út	2	3	4	5	1
St	3	4	5	1	2
Čt	4	5	1	2	3
Pá	5	1	2	3	4

d) Jedná se o problém, kolika způsoby lze přeskládat předchozí tabulku. Abychom zajistili v každém řádku i sloupci každé číslo jen jednou, musíme přerovnávat celé sloupce nebo celé řádky tabulky. Počet způsobů přerovnání řádků je $5!$ a počet přerovnání sloupců je $5!$. Každá tabulka tam ale bude dvakrát. Tedy celkový počet možností je $5! \cdot 5! : 2 = 7\,200$.

12. Mistr má sestavit rozpis práce pro 6 zaměstnanců na směnu. Má k dispozici dva soustruhy, dvě frézy, brusku a vrtačku. Směna má 8 hodin a zaměstnanec musí pracovat u stejného stroje minimálně hodinu a celý počet hodin. Může tedy pracovat u jednoho stroje od 1 hodiny až po 8 hodin. Sestavte několik rozpisů jedné směny. Kolika způsoby může mistr rozdělit práci?

Řešení:

Tabulka 8. Kombinatorika – příklad 12 – řešení 1

Hodina	Pracovník číslo					
	Soustruh 1	Soustruh 2	Fréza 1	Fréza 2	Bruska	Vrtačka
1.	1	2	3	4	5	6
2.	2	3	4	5	6	1
3.	3	4	5	6	1	2
4.	4	5	6	1	2	3
5.	5	6	1	2	3	4
6.	6	1	2	3	4	5
7.	1	2	3	4	5	6
8.	2	3	4	5	6	1

Tabulka 9. Kombinatorika – příklad 12 – řešení 2

Hodina	Pracovník číslo					
	Soustruh 1	Soustruh 2	Fréza 1	Fréza 2	Bruska	Vrtačka
1.	1	2	3	4	5	6
2.	1	2	3	4	5	6
3.	2	3	4	5	6	1
4.	2	3	4	5	6	1
5.	3	4	5	6	1	2
6.	4	5	6	1	2	3
7.	5	6	1	2	3	4
8.	6	1	2	3	4	5

Tabulka 10. Kombinatorika – příklad 12 – řešení 3

Hodina	Pracovník číslo					
	Soustruh 1	Soustruh 2	Fréza 1	Fréza 2	Bruska	Vrtačka
1.	1	2	3	4	5	6
2.	1	2	3	4	5	6
3.	1	2	3	4	5	6
4.	1	2	3	4	5	6
5.	1	2	3	4	5	6
6.	1	2	3	4	5	6
7.	1	2	3	4	5	6
8.	1	2	3	4	5	6

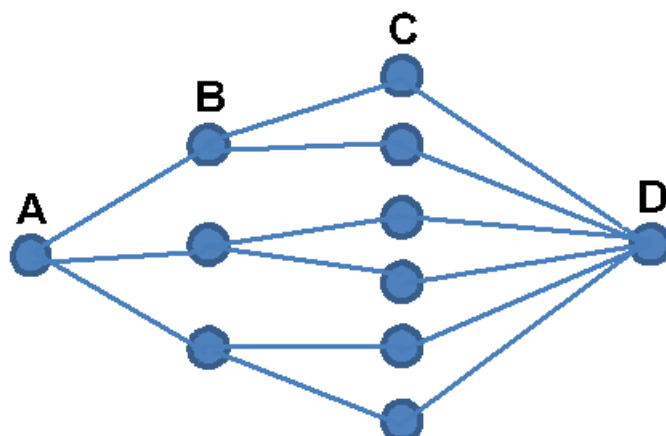
Počet možností pro jednu hodinu: $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$

Počet možností pro 8 hodin:

$$720 \cdot 720 \cdot 720 \cdot 720 \cdot 720 \cdot 720 \cdot 720 \cdot 720 = 720^8 = 72\,220\,413\,630\,873\,600\,000\,000$$

13. Kolika způsoby může vzniknout výrobek, jestliže začíná od skladnice A, která pošle komponenty třem zaměstnankyním B, které obsluhují každá dva stroje C a od těch jdou

výrobky k expedičnímu pracovníkovi D. Výrobky projdou po cestách, které vidíme na obrázku. Předpokládáme, že se výrobky nebudou nikde vracet.



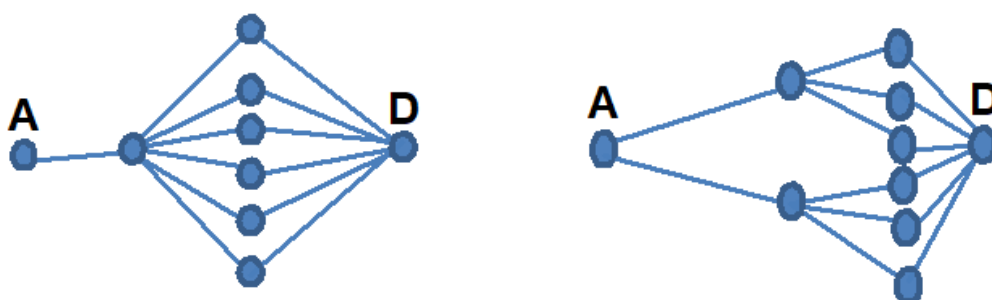
Obrázek 12. Kombinatorika – příklad 13 – zadání

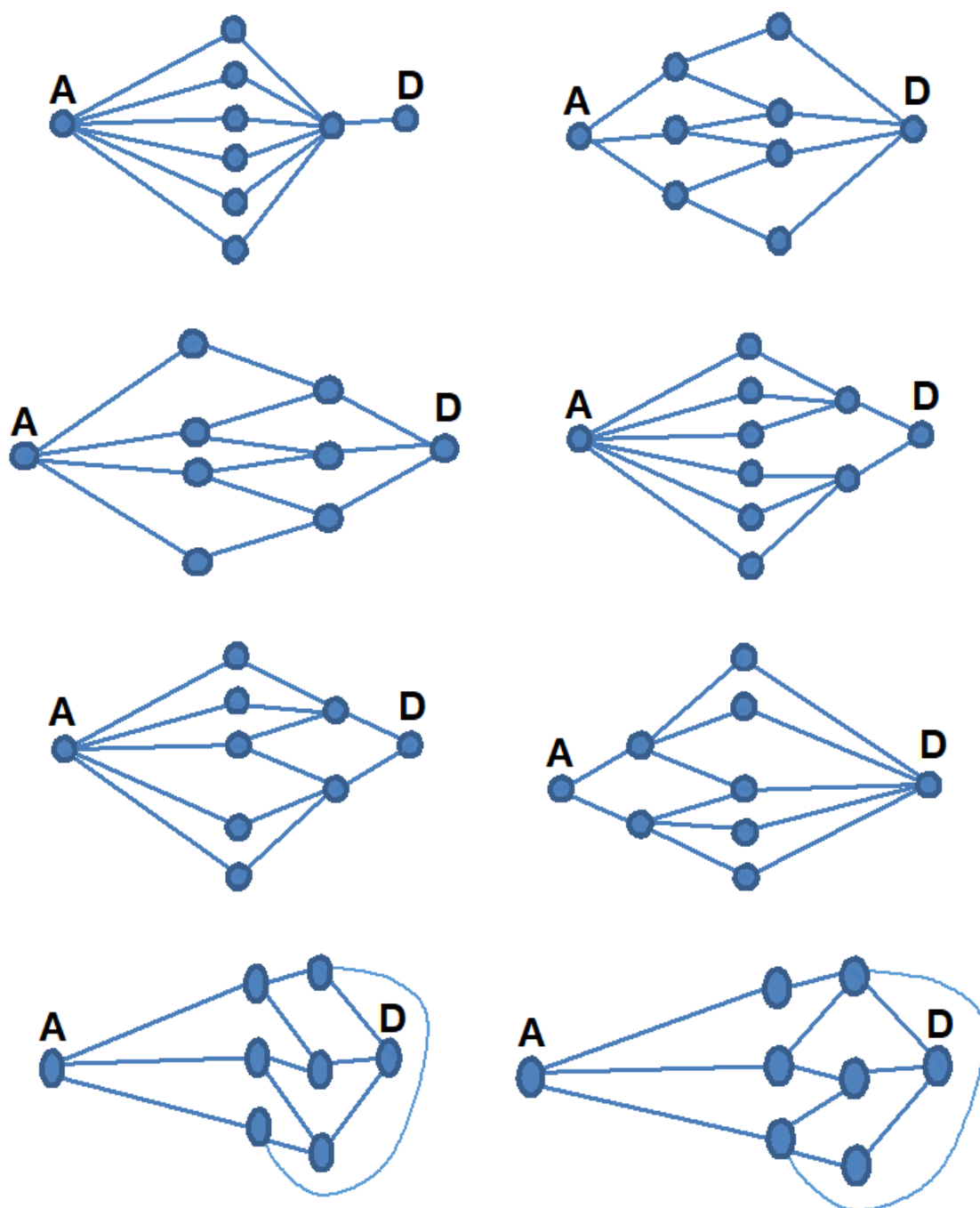
Nakreslete nějakou jinou mapu, kde výrobky projdou zleva doprava (nebudou se vracet) a budou mít stejný počet možností projít od skladu A k expedici D. Cesty se nesmí křížit a větvení je možné jen mezi dělníky a stroji.

Řešení:

Ze skladu A může materiál vyrazit třemi cestami. U zaměstnankyně B má na výběr vždy ze dvou cest k některému stroji C a do expedice D může dorazit už jen po jediné cestě. Počet cest bude $1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$.

Jiné mapy mohou vypadat různě. Například:





Obrázek 13. Kombinatorika – příklad 13 – řešení

14. Stroj je chráněn proti neodborné manipulaci dvěma zámky. Jeden se otevře po správném zadání tří číslic (0 až 9), druhý se otevře po správném zadání čtyř číslic.
- Kolik možností zadání obou kódů má pracovník, který nezná správné pořadí číslic a chtěl by stroj zprovoznit?
 - Jak by se situace změnila, kdyby byl stroj chráněn jen jedním sedmimístným zámekem?

Řešení:

Varianta 1:

- a) U třímístného zámku musí pracovník vyzkoušet trojice (čísla) od 000 až po 999, což je 1 000 čísel. U čtyřmístného zámku musí vyzkoušet čtveřice (čísla) od 0000 až po 9999, tedy 10 000 možností. Celkem musí použít pro třímístný zámek 1 000 čísel a pro čtyřmístný 10 000 čísel, tedy celkem 11 000 čísel.
- b) U sedmimístného zámku musí vyzkoušet trojice (čísla) od 0000000 až po 9999999, což je 10 000 000 čísel. Sedmimístný zámek je bezpečnější.

Varianta 2:

Pracovník může použít číslice od nuly do devítky, tedy deset číslic.

a)

Tabulka 11. Kombinatorika – příklad 14 -

řešení

1. pozice	2. pozice	3. pozice
0	0	0
		1
		2
		3
		4
		5
		6
		7
		8
		9
	1	0
		1
		
		9
		
1	9	
	0	0
		1
		
		9
	1	
		
	9	
		
2		
....		
9		

Pro trojmístný zámek:

Ke každé číslici na prvním místě kódu může pracovník vyzkoušet deset číslic na druhém místě a ke každé takové dvojici může vyzkoušet deset číslic na třetím místě. V úplné tabulce by bylo $10 \cdot 10 \cdot 10$ řádků, tedy 1000 možností.

Pro čtyřmístný zámek:

Ke každé číslici na prvním místě kódu může pracovník vyzkoušet deset číslic na druhém místě, ke každé takové dvojici může vyzkoušet deset číslic na třetím místě a ke každé takové trojici může vyzkoušet deset číslic na čtvrtém místě. U čtyřmístného zámku by tabulka měla jeden sloupec navíc a počet všech čísel by stoupl na $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10$, tedy 10 000 možností.

Pro oba zámky by musel vyzkoušet 11 000 možností.

- b) Ke každé číslici na prvním místě kódu může vyzkoušet deset číslic na druhém místě, ke každé takové dvojici může vyzkoušet deset číslic na třetím místě, ke každé takové trojici může vyzkoušet deset číslic na třetím místě a tak dále až po sedmé místo. V tabulce by bylo 7 sloupců, tedy počet možností $10^7 = 10\,000\,000$. Bezpečnější je jeden sedmimístný zámek.

11 Pravděpodobnost

1. Na oddělení kontroly jakosti zjistili, že mezi 150 výrobky z provozu X je 10 vadných a mezi 200 výrobky z provozu Y je 5 vadných. Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraný výrobek bude vadný?

Řešení:

$$P(A) = 15 / 350 = 0,0429$$

2. V krabici jsou matice a šrouby, mohou mezi nimi být i rezavé matice a šrouby. Vybereme jednu součástku a označíme následující jevy: A – vybraná součástka je šroub, B – vybraná součást je rezavá, C – vybraná součást má levotočivý závit.
- a) Kdy nastane jev $D = A \cap B \cap \bar{C}$?
 - b) Při které podmínce bude platit rovnost $A \cap B \cap C = A$?
 - c) Kdy bude platit inkluze $\bar{C} \subset B$?
 - d) Kdy bude platit rovnost $\bar{A} = B$?
 - e) Bude platit rovnost $\bar{A} = B$, když žádný šroub nebude rezavý?
 - f) Co značí jev $E = A \cup B$?

Řešení:

- a) Vybraná součást je rezavý šroub s pravotočivým závitem.
 - b) Všechny šrouby jsou rezavé a mají levotočivý závit.
 - c) Všechny součástky s pravotočivým závitem jsou rezavé.
 - d) Všechny matice jsou rezavé a žádný šroub není rezavý.
 - e) Nemusí platit, protože i matice nemusí být rezavé.
 - f) Vybraná součást je šroub nebo rezavá součást.
3. V podniku byla provedena analýza poruchovosti stroje. Podle zadaných údajů určete pravděpodobnost poruchy tohoto stroje.

Tabulka 12. Pravděpodobnost – příklad 3 – zadání 1

rok	pracovní hodiny	
	bez poruchy	s poruchou
2004	25 030	1 740
2005	26 120	1 790
2006	26 320	1 810
2007	27 430	1 810
2008	27 510	1 780

Byla předložena 2 řešení. Posuďte obě řešení z hlediska provozu stroje.

Tabulka 13. Pravděpodobnost – příklad 3 – zadání 2

řešení A				řešení B			
rok	n_i	n	p	rok	n_i	n	p
2004	1740	26770	0,06500	2004	1740	26770	0,0650
2005	1790	27910	0,06413	2005	3530	54680	0,0646
2006	1810	28130	0,06434	2006	5340	82810	0,0645
2007	1810	29240	0,06190	2007	7150	112050	0,0638
2008	1780	29290	0,06077	2008	8930	141340	0,0620

n_i – počet pracovních hodin s poruchou

n – celkový počet pracovních hodin stroje

p_i – relativní četnost (n_i/n)

Řešení:

- A. Z uvedených výsledků vyplývá, že pravděpodobnost poruchy stroje je přibližně 6,75 %.
- B. Celková pravděpodobnost poruchy stroje je asi 6,2 %.
4. V zásilce je 400 výrobků, z nichž 10 je vadných. Náhodně vybereme 4 výrobky (vybrané nevracíme během kontroly zpět). Jaká je pravděpodobnost, že mezi nimi budou:
- právě 3 vadné výrobky;
 - nejvýše 3 vadné výrobky;
 - alespoň 3 vadné výrobky?

Řešení:

$$\text{a) } P(A) = \frac{\binom{390}{1} \cdot \binom{10}{3}}{\binom{400}{4}} = \frac{390 \cdot 120}{1\,050\,739\,900} = 0,0000445$$

$$\begin{aligned} \text{b) } P(B) &= \frac{\binom{390}{4} \cdot \binom{10}{0} + \binom{390}{3} \cdot \binom{10}{1} + \binom{390}{2} \cdot \binom{10}{2} + \binom{390}{1} \cdot \binom{10}{3}}{\binom{400}{4}} = \\ &= \frac{949\,173\,620 + 9\,810\,580 \cdot 10 + 75\,855 \cdot 45 + 390 \cdot 120}{1\,050\,739\,900} = 0,999 \end{aligned}$$

$$\text{Jednodušší řešení: } P(B) = 1 - \frac{\binom{360}{0} \cdot \binom{10}{4}}{\binom{400}{4}} = 1 - 0,0000002$$

$$\text{c) } P(C) = \frac{\binom{390}{1} \cdot \binom{10}{3} + \binom{390}{0} \cdot \binom{10}{4}}{\binom{400}{4}} = \frac{390 \cdot 120 + 210}{1\,050\,739\,900} = 0,0000447$$

5. V bedně je 30 výrobků, z nichž jsou 3 vadné. Jaká je pravděpodobnost, že:

- a) mezi 5 náhodně vybranými výrobky není žádný vadný;
- b) mezi 5 náhodně vybranými výrobky jsou alespoň dva vadné;
- c) mezi 5 náhodně vybranými výrobky jsou nejvýše dva vadné?

Řešení:

$$\text{a) } P(A) = \frac{\binom{27}{5} \cdot \binom{3}{0}}{\binom{30}{5}} = 0,567$$

$$\text{b) } P(A) = \frac{\binom{27}{3} \cdot \binom{3}{2} + \binom{27}{2} \cdot \binom{3}{3}}{\binom{30}{5}} = 0,064$$

$$\text{c) } P(A) = \frac{\binom{27}{5} \cdot \binom{3}{0} + \binom{27}{4} \cdot \binom{3}{1} + \binom{27}{3} \cdot \binom{3}{2}}{\binom{30}{5}} = 0,998$$

Přes pravděpodobnost doplňkového jevu vyjde: $1 - 0,00246 = 0,9975$

6. Máme sérii 100 výrobků. Náhodně kontrolujeme pět výrobků, které při výběru nevracíme zpět. Jestliže se mezi kontrolovanými výrobky vyskytne zmetek, je celá série vyřazena jako zmetkovitá. Jaká bude pravděpodobnost, že série bude vyřazena jako zmetkovitá, víme-li, že je mezi sto výrobky šest zmetků?

Řešení:

A – mezi pěti kontrolovanými výrobky je alespoň jeden zmetek

$\bar{A}$ – mezi pěti kontrolovanými výrobky není ani jeden zmetek

Víme, že $P(A) = 1 - P(\bar{A})$, proto stačí určit $P(\bar{A})$

$$P(\bar{A}) = \frac{\binom{94}{5}}{\binom{100}{5}} = 0,729$$

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - 0,729 = 0,271$$

7. Série, kterou tvoří sto výrobků, je podrobena kontrole. Série není zákazníkem přijata, je-li mezi pěti kontrolovanými výrobky alespoň jeden vadný (vybrané výrobky se při kontrole nevracejí zpět). Jaká je pravděpodobnost, že zákazník sérii nepřijme, víme-li, že obsahuje 5 % vadných výrobků?

Řešení:

Určíme pravděpodobnost opačného jevu, A' – série bude přijata:

$$P(A') = P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5) = \frac{95}{100} \cdot \frac{94}{99} \cdot \frac{93}{98} \cdot \frac{92}{97} \cdot \frac{91}{96} = 0,77$$

$$P(A) = 1 - P(A') = 0,23$$

8. Závod vyrábí určitou součástku, která je podrobena třem různým zkouškám. Jev A spočívá v tom, že náhodně vybraná součástka obstojí při první zkoušce, jev B v tom, že obstojí ve druhé zkoušce a jev C v tom, že obstojí ve třetí zkoušce. Jak vyjádříme v množinové symbolice, že součástka obstojí:
- jen v první zkoušce;
 - v první a ve druhé zkoušce, ale neobstojí ve třetí zkoušce;
 - právě v jedné zkoušce;
 - alespoň v jedné zkoušce;
 - právě ve dvou zkouškách;
 - alespoň ve dvou zkouškách;

- g) ve všech třech zkouškách;
h) maximálně dvakrát?

Řešení:

- a) $A \cap \bar{B} \cap \bar{C}$
b) $A \cap B \cap \bar{C}$
c) $(A \cap \bar{B} \cap \bar{C}) \cup (\bar{A} \cap B \cap \bar{C}) \cup (\bar{A} \cap \bar{B} \cap C)$
d) $(A \cap \bar{B} \cap \bar{C}) \cup (\bar{A} \cap B \cap \bar{C}) \cup (\bar{A} \cap \bar{B} \cap C) \cup (A \cap B \cap \bar{C}) \cup (A \cap \bar{B} \cap C) \cup (\bar{A} \cap B \cap C) \cup (A \cap B \cap C) =$
 $= A \cup B \cup C$
e) $(A \cap B \cap \bar{C}) \cup (A \cap \bar{B} \cap C) \cup (\bar{A} \cap B \cap C)$
f) $(A \cap B \cap \bar{C}) \cup (A \cap \bar{B} \cap C) \cup (\bar{A} \cap B \cap C) \cup (A \cap B \cap C)$
g) $(A \cap B \cap C)$
h) $(\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}) \cup (A \cap \bar{B} \cap \bar{C}) \cup (\bar{A} \cap B \cap \bar{C}) \cup (\bar{A} \cap \bar{B} \cap C) \cup (A \cap B \cap \bar{C}) \cup (A \cap \bar{B} \cap C) \cup (\bar{A} \cap B \cap C) =$
 $= \overline{A \cap B \cap C}$

9. Automat má tři části – a_1 , a_2 a b . Části a_1 a a_2 jsou v případě poruchy zastupitelné. Část b pracuje samostatně. Jev A_1 značí poruchu části a_1 , jev A_2 poruchu části a_2 a jev B poruchu části b . Automat má poruchu, jestliže má poruchu část b nebo obě části a_1 a a_2 . Vyjádřete tento jev C pomocí jevů A_1 , A_2 a B .

Řešení:

$$C = (A_1 \cap A_2) \cup B$$

10. Při kontrole obsahu určité látky ve směsi bylo zjištěno, že za normálních okolností mají v průměru 3 % směsí obsah nižší, než udává norma, a 5 % směsí má naopak obsah vyšší. Zbýlých 92 % směsí je přesně v normě. Jaká je pravděpodobnost, že vyrobená směs je mimo normu?

Řešení:

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) = 0,03 + 0,05 = 0,08$$

11. Pravděpodobnost vyrobení výrobku I. jakosti na stroji A je 0,9, na stroji B 0,8. Na stroji A mají být zhotoveny tři výrobky a na stroji B dva výrobky. Určete, s jakou pravděpodobností budou všechny výrobky I. jakosti.

Řešení:

$$P(A_1) = 0,9, P(A_2) = 0,9, P(A_3) = 0,9, P(A_4) = 0,8, P(A_5) = 0,8$$

$$P(A) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) \cdot P(A_4) \cdot P(A_5) = 0,467$$

12. K přerušení elektrického proudu dojde tehdy, když se vyřadí z provozu alespoň jeden ze tří za sebou spojených prvků. Určete pravděpodobnost toho, že se síť nepřeruší, jsou-li prvky vyřazovány z provozu po řadě s pravděpodobnostmi 0,3; 0,4 a 0,6. Jak se změní hledaná pravděpodobnost, jestliže první prvek není vyřazován z provozu?

Řešení:

jev A_1 – z provozu je vyřazen první prvek

jev A_2 – z provozu je vyřazen druhý prvek

jev A_3 – z provozu je vyřazen třetí prvek

$$P(A) = P(\overline{A_1}) \cdot P(\overline{A_2}) \cdot P(\overline{A_3}) = 0,7 \cdot 0,6 \cdot 0,4 = 0,168$$

$$P(B) = P(\overline{A_2}) \cdot P(\overline{A_3}) = 0,6 \cdot 0,4 = 0,24$$

13. Žák má dělat závěrečné zkoušky tříletého učebního oboru. Musí napsat písemku a udělat praktickou a ústní zkoušku. Protože se moc neučil, odhaduje svoje šance u všech zkoušek na 50 %.
- a) Jaká je pravděpodobnost, že udělá všechny tři zkoušky na první pokus, předpokládáme-li, že výsledky zkoušek na sobě navzájem nezávisí?
- b) Jakou pravděpodobnost úspěchu by musel mít u všech zkoušek, aby pravděpodobnost, že uspěje na první pokus, byla alespoň 50 %?

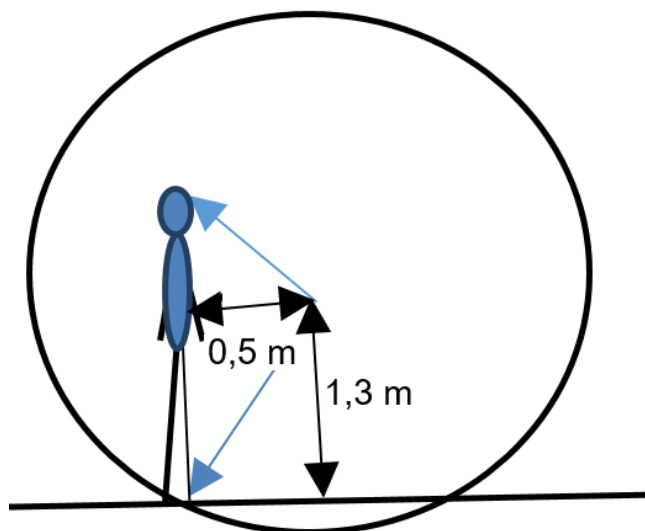
Řešení:

a) $P(A) = 0,5 \cdot 0,5 \cdot 0,5 = 0,125$

Jeho šance udělat závěrečnou zkoušku na první pokus je 12,5 %.

b) $P(X)^3 = 0,5 \Rightarrow P(X) = 0,7937$

14. Nedbalý zaměstnanec výšky 180 cm stojí ve vzdálenosti 0,5 m od rotujícího obrobku, který se nachází ve výšce 1,3 m. Zaměstnanec stojí v rovině otáčení obrobku a soustruh nemá kryt, který by zaměstnance chránil. Jaká je pravděpodobnost zasažení zaměstnance uvolněnou šponou?



Obrázek 14. Pravděpodobnost – příklad 14 – zadání

Řešení:

Pravděpodobnost zasažení odpovídá poměru úhlu, ve kterém vyletí špona, která zasáhne zaměstnance, k celému úhlu, ve kterém může špona vyletět, tedy 360° . Úhel, ve kterém vyletí špona a zasáhne dělníka, sestává z dolní části α , odpovídající zásahu od pasu dolů, a horní části β , odpovídající zásahu nahoru od pasu těla. Úhly vypočítáme z příslušných pravoúhlých trojúhelníků: $\text{tg } \alpha = 1,3 / 0,5$, odtud $\alpha = 69^\circ$, $\text{tg } \beta = 0,5 / 0,5$, odtud $\beta = 45^\circ$. Tedy celý úhel je přibližně 114° . Pravděpodobnost zasažení je $114 : 360 = 0,32$, tedy 32 %.

15. Při průjezdu cílem závodu F1 uvolněná matice prostřelila cílový šachovnicový prapor. Předpokládáme, že prapor se nacházel téměř kolmo ke směru letu matice. Prapor se skládá z 10×8 čtverců.

- a) Určete pravděpodobnost, že otvor po matici bude v černém čtverci?



Obrázek 15. Pravděpodobnost – příklad 15 – zadání 1

- b) Určete pravděpodobnost, že otvor po matici bude v černém čtverci, jestliže v okamžiku zásahu byl prapor přehnut přesně na poloviny.



Obrázek 16. Pravděpodobnost – příklad 15 – zadání 2

- c) Určete, jak by musel být přehnut prapor, aby pravděpodobnost zásahu černého čtverce byla pět osmin.

Řešení:

- a) Černých čtverců je 40 a všech čtverců je 80, proto bude pravděpodobnost zásahu černého čtverce:

$$P(A) = \frac{40}{80} = 0,5$$

- b) Při přehnutí vlajky se každý bílý čtverec překryje černým čtvercem, proto bude pravděpodobnost zasažení černého čtverce rovna 1.

- c) Stačí například přehnutí dvou řad po osmi čtvercích. Pak:

$$P(C) = \frac{\frac{1}{2} \cdot 6.8 + 2.8}{6.8 + 2.8} = \frac{40}{64} = \frac{5}{8}$$

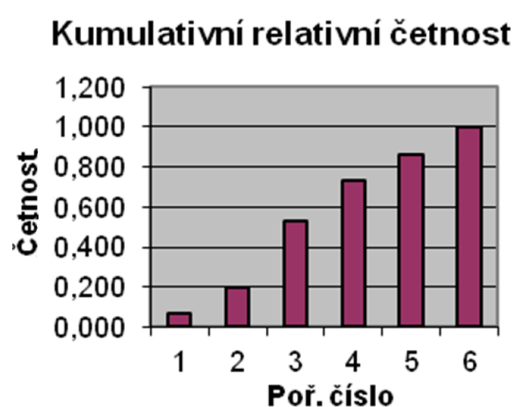
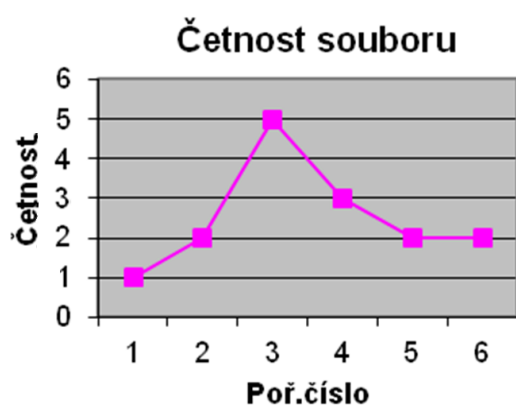
12 Statistika a práce s daty

1. Je dán statistický soubor: 3,8; 4,1; 3,9; 3,4; 3,8; 3,9; 4,0; 3,5; 3,8; 3,8; 3,5; 4,0; 3,9; 3,8; 4,1.
 - a) Vytvořte jednotlivé třídy četnosti, určete polygon četnosti (spojnicový diagram) a histogram kumulativní relativní četnosti.
 - b) Vypočítejte aritmetický průměr, modus, medián, rozptyl, směrodatnou odchylku, variační rozpětí a variační koeficient.

Řešení:

Tabulka 14. Statistika a práce s daty – příklad 1 – řešení

Pořadové číslo	x_i	Četnost n_i	Kumulativní četnost	Relativní četnost	Kumulativní relativní četnost	$x_i \cdot n_i$	$x_i^2 \cdot n_i$
1	3,40	1	1	0,067	0,067	3,40	11,56
2	3,50	2	3	0,133	0,200	7,00	24,50
3	3,80	5	8	0,333	0,533	19,00	72,20
4	3,90	3	11	0,200	0,733	11,70	45,63
5	4,00	2	13	0,133	0,866	8,00	32,00
6	4,10	2	15	0,133	1,000	8,20	33,62
Celkem	x	15	x	1,000	x	57,30	219,51



Graf 4. Statistika a práce s daty – příklad 1 – řešení

modus: $\text{mod}(x) = 3,8$

medián: $\text{med}(x) = 3,8$

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i \cdot n_i}{\sum_{i=1}^n n_i} = 3,82$$

$$s_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 \cdot n_i}{\sum_{i=1}^n n_i} - \bar{x}^2 = 0,0416 \quad s_x = \sqrt{s_x^2} = 0,204 \quad v_x = \frac{s_x}{\bar{x}} \cdot 100 = 5,34 \%$$

Variační rozpětí $R = 4,1 - 3,4 = 0,7$

2. 15 zaměstnanců vyrobí za směnu 8, 5, 9, 8, 6, 6, 10, 8, 7, 6, 9, 7, 8, 6, 7 výrobků. Vypočítejte průměrný počet výrobků vyrobených za směnu jedním zaměstnancem.

Řešení:

$$\bar{x} = \frac{110}{15} = 7,3$$

3. Zpracujte následující tabulku 50 hodnot získaných měření a stanovte aritmetický průměr, modus, medián, rozptyl a směrodatnou odchylku.

Tabulka 15. Statistika a práce s daty – příklad 3 – zadání

4,8	4,7	5,2	5,3	4,7	5,0	5,1	4,7	5,0	5,3
5,0	4,8	5,0	4,8	5,2	5,2	5,3	5,0	4,9	5,1
5,1	4,9	5,1	4,8	5,0	4,9	5,1	4,9	4,8	4,9
5,2	4,7	4,8	5,0	4,8	5,0	5,0	5,3	5,0	5,0
4,9	5,1	5,0	5,0	5,1	5,1	5,2	4,9	5,1	5,1

Řešení:

Tabulka 16. Statistika a práce s daty – příklad 3 – řešení

x_i	n_i	$x_i \cdot n_i$	$x_i^2 \cdot n_i$		
4,7	4	18,8	88,36	Aritmetický průměr:	$\bar{x} = \frac{249,9}{50} = 4,998$
4,8	7	33,6	161,28	Modus:	$\text{mod}(x) = 5$
4,9	7	34,3	168,07	Medián:	$\text{med}(x) = 5$
5,0	13	65	325	Rozptyl:	$s^2 = \frac{1\,250,37}{50} - 4,998^2 = 0,0274$
5,1	10	51	260,1		
5,2	5	26	135,2	Směrodatná odchylka:	$s = \sqrt{s^2} = 0,1655$
5,3	4	21,2	112,36		
Celkem	50	249,9	1 250,37		

4. Při měření byly zjištěny údaje v mm 0,69; 0,70; 0,73; 0,72; 0,71; 0,72; 0,70; 0,71; 0,71. Stanovte medián, modus, variační rozpětí, aritmetický průměr, rozptyl, směrodatnou odchylku a variační koeficient.

Řešení:

$$\begin{array}{llll} \text{mod}(x) = 0,71 & R = 0,04 & s_x^2 = 0,0001\bar{3} & v_x = 1,6 \% \\ \text{med}(x) = 0,71 & \bar{x} = 0,71 & s_x = 0,0115 & \end{array}$$

5. Vypočítejte průměrné náklady na jeden výrobek, máte-li tyto údaje:

Tabulka 17. Statistika a práce s daty – příklad 5 – zadání

Série	Počet výrobků	Náklady na jeden výrobek v Kč
01	200	2 900
02	250	2 850
03	500	2 700
04	430	2 650
05	180	2 850
06	730	2 750

Řešení:

$$\bar{x} = \frac{200 \cdot 2\,900 + 250 \cdot 2\,850 + 500 \cdot 2\,700 + 430 \cdot 2\,650 + 180 \cdot 2\,850 + 730 \cdot 2\,750}{2\,290} = 2\,752,20 \text{ Kč}$$

6. Statisticky zpracujte následující tabulku 50 hodnot délek získaných měřením (v cm) a stanovte aritmetický průměr, rozptyl, směrodatnou odchylku a variační koeficient.

Tabulka 18. Statistika a práce s daty – příklad 6 – zadání

hodnota	4,7	4,8	4,9	5,0	5,1	5,2	5,3
počet	4	7	7	13	10	5	4

Řešení:**Tabulka 19. Statistika a práce s daty – příklad 6 – řešení**

x_i	n_i	$x_i \cdot n_i$	$x_i^2 \cdot n_i$	Aritmetický průměr:	$\bar{x} = \frac{249,9}{50} = 4,998$
4,7	4	18,8	88,36		
4,8	7	33,6	161,28	Rozptyl:	$s^2 = \frac{1\,250,37}{50} - 4,998^2 = 0,0274$
4,9	7	34,3	168,07		
5,0	13	65	325	Směrodatná odchylka:	$s = \sqrt{s^2} = 0,1655$
5,1	10	51	260,1		
5,2	5	26	135,2	Variační koeficient:	$v_x = \frac{s_x}{\bar{x}} = 0,033 = 3,3 \%$
5,3	4	21,2	112,36		
Celkem	50	249,9	1 250,37		

7. V osmi sériích určitého druhu součástek byl zjišťován počet vadných součástek. Určete pravděpodobnost převzetí vadné součástky.

Tabulka 20. Statistika a práce s daty – příklad 7 – zadání

Série	Počet dodaných součástek	Počet vadných součástek
1	741	32
2	843	36
3	654	28
4	699	30
5	766	33
6	674	29
7	882	38
8	810	35
Celkem	6 069	261

Řešení:

Z tabulky odhadneme pravděpodobnost převzetí vadné součástky na 0,043.

8. Uvažujme produkci dvou závodů. Produkce závodu A se vyjadřuje v kusech, v závodě B v tunách. Na základě údajů v tabulce posuďte, ve kterém ze závodů byla během dekády výroba rovnoměrnější.

Tabulka 21. Statistika a práce s daty – příklad 8 – zadání

Série	Produkce závodu A (1 000 ks) x_i	Produkce závodu B (tuny) y_i
1	1	6
2	2	6
3	2	5
4	3	8
5	2	9
6	4	4
7	2	4
8	1	6
9	2	7
10	4	7

Řešení:

Rovnoměrnost vypočítáme porovnáním variačních koeficientů. Čím je koeficient menší, tím je výroba rovnoměrnější.

$$s_x^2 = \frac{63}{10} - 2,3^2 = 1,01 \Rightarrow s_x = 1$$

$$s_y^2 = \frac{408}{10} - 6,2^2 = 2,36 \Rightarrow s_y = 1,54$$

$$V_x = \frac{1}{2,3} = 0,43 = 43 \%$$

$$V_y = \frac{1,54}{6,2} = 0,25 = 25 \%$$

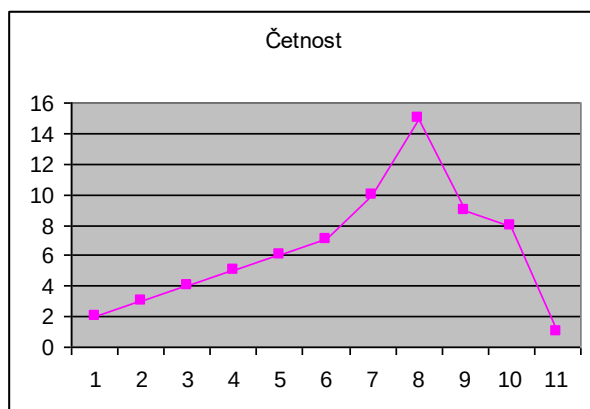
Výroba byla rovnoměrnější v závodě B.

9. Určete aritmetický průměr, modus, medián a načrtněte polygon četnosti, máte-li k dispozici tyto údaje:

Tabulka 22. Statistika a práce s daty – příklad 9 – zadání

Hodnoty znaku	Četnosti	Hodnoty znaku	Četnosti
1	2	7	10
2	3	8	15
3	4	9	9
4	5	10	8
5	6	11	1
6	7		

Řešení:



$$\bar{x} = 6,77$$

$$\text{med}(x) = 7$$

$$\text{mod}(x) = 8$$

Graf 5. Statistika a práce s daty – příklad 9 – řešení

10. V podniku, který má 700 zaměstnanců, máme k dispozici hodinové mzdy jednotlivých pracovníků:

Tabulka 23. Statistika a práce s daty – příklad 10 – zadání

Interval hodinových mezd v Kč	Muži	Ženy
20 – 29,9	40	24
30 – 39,9	80	36
40 – 49,9	100	60
50 – 59,9	150	48
60 – 69,9	90	20
70 – 79,9	25	12
80 a více	15	0
Celkem	500	200

Určete relativní četnost, průměrnou mzdu, rozptyl, směrodatnou odchylku a variační koeficient jak pro mzdy mužů, tak žen.

Řešení:

Tabulka 24. Statistika a práce s daty – příklad 10 – řešení

Interval hodinových mzd v Kč	Absolutní četnost		Relativní četnost		S. I.	Muži	Ženy	Muži	Ženy
	Muž i	Ženy	Muž i	Ženy					
	ni								
20 – 29,9	40	24	0,08	0,12	25	1 000	600	25 000	15 000
30 – 39,9	80	36	0,16	0,18	35	2 800	1 260	98 000	44 100
40 – 49,9	100	60	0,2	0,3	45	4 500	2 700	202 500	121 500
50 – 59,9	150	48	0,3	0,24	55	8 250	2 640	453 750	145 200
60 – 69,9	90	20	0,18	0,1	65	5 850	1 300	380 250	84 500
70 – 79,9	25	12	0,05	0,06	75	1 875	900	140 625	67 500
80 a více	15	0	0,03	0	85	1 275	0	108 375	0
Celkem	500	200	1	1	x	25 550	9 400	1 408 500	477 800

S. I. – středy intervalů

$$\bar{x}_m = \frac{25\,550}{500} = 51,1$$

$$s_m^2 = \frac{1\,408\,500}{500} - 51,1^2 = 205,79$$

$$s_m = \sqrt{205,79} = 14,345$$

$$v_m = \frac{14,345}{51,1} = 0,281$$

$$\bar{x}_z = \frac{9\,400}{200} = 47$$

$$s_z^2 = \frac{477\,800}{200} - 47^2 = 180$$

$$s_z = \sqrt{112,5} = 10,607$$

$$v_z = \frac{10,607}{47} = 0,226$$

13 Seznam tabulek, grafů a obrázků

13.1 Seznam tabulek

Tabulka 1.	Funkce – příklad 10 – řešení	27
Tabulka 2.	Analytická geometrie v rovině – příklad 3 – řešení	53
Tabulka 3.	Analytická geometrie v rovině – příklad 3 – řešení	54
Tabulka 4.	Analytická geometrie v rovině – příklad 4 – řešení	54
Tabulka 5.	Analytická geometrie v rovině – příklad 4 – řešení	54
Tabulka 6.	Kombinatorika – příklad 10 – řešení.....	61
Tabulka 7.	Kombinatorika – příklad 11 – řešení.....	62
Tabulka 8.	Kombinatorika – příklad 12 – řešení 1	62
Tabulka 9.	Kombinatorika – příklad 12 – řešení 2.....	63
Tabulka 10.	Kombinatorika – příklad 12 – řešení 3.....	63
Tabulka 11.	Kombinatorika – příklad 14 - řešení	66
Tabulka 12.	Pravděpodobnost – příklad 3 – zadání 1	69
Tabulka 13.	Pravděpodobnost – příklad 3 – zadání 2	69
Tabulka 14.	Statistika a práce s daty – příklad 1 – řešení	76
Tabulka 15.	Statistika a práce s daty – příklad 3 – zadání	77
Tabulka 16.	Statistika a práce s daty – příklad 3 – řešení	77
Tabulka 17.	Statistika a práce s daty – příklad 5 – zadání	78
Tabulka 18.	Statistika a práce s daty – příklad 6 – zadání	78
Tabulka 19.	Statistika a práce s daty – příklad 6 – řešení	79
Tabulka 20.	Statistika a práce s daty – příklad 7 – zadání	79
Tabulka 21.	Statistika a práce s daty – příklad 8 – zadání	80
Tabulka 22.	Statistika a práce s daty – příklad 9 – zadání	81
Tabulka 23.	Statistika a práce s daty – příklad 10 – zadání	81
Tabulka 24.	Statistika a práce s daty – příklad 10 – řešení	82

13.2 Seznam grafů

Graf 1.	Funkce – příklad 21 – řešení	29
Graf 2.	Funkce – příklad 22 – zadání	30
Graf 3.	Rovnice a nerovnice – příklad 17 - řešení.....	35
Graf 4.	Statistika a práce s daty – příklad 1 – řešení	76
Graf 5.	Statistika a práce s daty – příklad 9 – řešení	81

13.3 Seznam obrázků

Obrázek 1.	Planimetrie – příklad 22 – zadání.....	43
Obrázek 2.	Planimetrie – příklad 23 – zadání.....	43
Obrázek 3.	Planimetrie – příklad 25 – zadání.....	44
Obrázek 4.	Planimetrie – příklad 29 – zadání.....	45
Obrázek 5.	Planimetrie – příklad 40 – zadání.....	47
Obrázek 6.	Planimetrie – příklad 41 – zadání.....	47
Obrázek 7.	Stereometrie – příklad 9 – zadání.....	51
Obrázek 8.	Analytická geometrie v rovině – příklad 2 - zadání	53
Obrázek 9.	Analytická geometrie v rovině – příklad 4 – zadání	54
Obrázek 10.	Analytická geometrie v rovině – příklad 5 – zadání	55
Obrázek 11.	Analytická geometrie v rovině – příklad 6 – zadání	55
Obrázek 12.	Kombinatorika – příklad 13 – zadání.....	64
Obrázek 13.	Kombinatorika – příklad 13 – řešení.....	65
Obrázek 14.	Pravděpodobnost – příklad 14 – zadání	74
Obrázek 15.	Pravděpodobnost – příklad 15 – zadání 1	74
Obrázek 16.	Pravděpodobnost – příklad 15 – zadání 2	75

14 Použité zdroje

14.1 Tištěné dokumenty

- [1] SCHALK, H. – CH. *Mathematik für höhere technische Lehranstalten*. Wien: Reniets Verlag, 1986.
- [2] KRIŽALKOVIČ, Karol, CUNINKA, Anton a ŠEDIVÝ, Ondrej. *500 riešených slovných úloh z matematiky*. 2. vyd. Bratislava: Alfa, 1971. Polytechnická knižnica (Alfa).
- [3] DOBROVOLNÝ, B. a kol. *Základní učebnice pro pracující v kovoprůmyslu*. Praha: SNTL, 1961.
- [4] FRISCHHERZ, Adolf a Herbert PIEGLER. *Technologie zpracování kovů*. Praha: SNTL, 1993.
- [5] KRIEGELSTEIN, E. a kol. *Sbírka úloh z matematiky pro střední průmyslové školy a střední zemědělské technické školy*. Praha: SPN, 1979.
- [6] NOVOTNÝ, J. *Strojírenská praxe v příkladech*. Praha: SPN, 1969.

14.2 Elektronické dokumenty

- [7] *Matematika pro všechny: web informací a studijních podkladů pro žáky, učitele a rodiče* [online]. [cit. 2018-09-26]. Dostupné z: <http://home.pf.jcu.cz/~math4all/>

