

Aplikované úlohy v matematice formou žákovských mini-projektů

Nabídka pro učitele středních odborných škol

Autoři: Miroslav Bartošek, František Procházka, Miroslav Staněk

Nově upravené Rámcové vzdělávací programy (RVP) pro střední odborné vzdělávání kladou důraz na zařazení aplikací matematiky, zejména se vztahem k učebnímu oboru žáků. Z naší zkušenosti víme, že je to pro učitele úkol nesnadný. Nabízíme způsob, jak využívat krátkodobé projekty z oblasti aplikace matematického učiva tematicky směřující k odbornému vzdělávání žáků. Navrhovaná forma je organizačně nenáročná a umožňuje i učitelům bez odborných znalostí v oboru vzdělání žáků zařadit do výuky matematiky aplikované úlohy tematicky směřující k odbornému vzdělávání žáků. Vhodné úlohy lze vybrat např. z dosud používané či jiné vhodné sbírky úloh z matematiky. Úkolem řešitele je jednoduchým, srozumitelným způsobem popsat odborný kontext úlohy, úlohu matematicky vyřešit a vše vhodným způsobem prezentovat v rámci výuky matematiky.

1. Úvod

Je důležité žákům ukazovat potřebnost a smysluplnost matematického vzdělávání pro jejich odbornou přípravu a profesní i občanský život. To znamená mimo jiné ve zvýšené míře věnovat pozornost aplikacím matematického učiva v oboru. Uplatnění aplikací ve výuce má obzvláště na středních odborných školách velký význam i pro motivaci žáků. Může i napomoci překonat současný negativní postoj žáků k matematice.

Víme, že většina učitelů matematiky na středních odborných školách neprošla přípravou na výuku s aplikovanými úlohami směřujícími k odbornému vzdělávání žáků a nemá s řešením takových úloh zkušenosti. Námi přizpůsobený koncept žákovských projektů může napomoci učitelům matematiky řešit uvedený problém. Je výhodný také tím, že nabízí i slabším žákům možnost úspěšně se prezentovat a prožít radost ze zdárného řešení jednoduchých úloh spojených s oborem jejich vzdělání.

2. Co nazýváme žákovskými mini-projekty

K dosažení uvedených cílů navrhujeme využívat ve výuce matematiky jednoduché krátkodobé projekty propojující učivo z matematiky s učivem z oblasti odborného vzdělávání. Tyto projekty řeší a prezentují žáci samostatně nebo v malých týmech s využitím informačních zdrojů a digitální techniky. Z uvedeného vyplývá, že se jedná o aktivity, které někdy nazýváme žákovské referáty. Zde jsou speciálně zaměřené na propojování výuky matematiky a odborného vzdělávání. Přesahují tak svou interpretací rámec běžného pojetí žákovských referátů, mají společné znaky s obecně chápanými žákovskými projekty, a proto je nazýváme **mini-projekty**.

Ty jsou pro učitele z hlediska přípravy a organizace jednoduché, umožňují i učitelům bez odborných znalostí v oboru vzdělání žáků zařadit do výuky matematiky aplikované úlohy tematicky směřující k odbornému vzdělávání žáků. Vhodné úlohy lze vybrat např. z již používané či jiné vhodné sbírky úloh z matematiky. Úkolem žáka je uvést odborný kontext úlohy a matematicky ji vypočítat. Matematické řešení i popis odborného kontextu úlohy řešitel vhodným způsobem prezentuje v rámci výuky matematiky.

Žákům tak umožňují **propojovat znalosti a dovednosti z matematiky a z oblasti odborné přípravy**, uplatnit svou kompetenci používání informačních zdrojů a při zpracování a prezentaci i digitální techniky. Jsou šancí i pro žáky se slabšími výsledky ve vzdělávání.

Náš návrh **není míněn jako koncept projektové výuky**, zaměřené na střednědobé a dlouhodobé projekty, popsány například v příručce (1). Doplnuje běžné metody výuky matematiky, podporuje potřebné propojování výuky všeobecně vzdělávacích předmětů, zde matematiky, s odborným vzděláváním, může být alternativou nebo doplňkem větších žákovských projektů, pokud je škola ve výuce používá.

Abychom ponechali v našich návrzích ŠVP možnost uplatnění i jinak koncipovaných žákovských projektů, je čas vymezený v našem návrhu časového rozdělení učiva označen jen **Žákovské projekty**.

3. Jak postupovat

Každý žákovský projekt, tedy i mini-projekt, se provádí v několika fázích. Oproti projektům z projektového vyučování je příprava i samotný průběh **žákovských mini-projektů** podstatně jednodušší, a tedy nenáročná na organizaci a administraci.

- zadání mini-projektu
- zpracování/ řešení mini-projektu
- prezentace výstupu mini-projektu
- hodnocení výstupu (řešení a prezentace) mini-projektu

- **Zadání mini-projektu**

Mini-projekty zařazujeme k řešení v souladu s probíhající výukou buď formou nabídky učitele, nebo na základě spontánního zájmu žáků v rámci aktuálního učiva. Východiskem pro zadání může být i zcela konkrétní úloha ze sbírky příkladů, která je ve vztahu k oblasti oboru vzdělání žáků. Vhodné úlohy lze nalézt v níže uvedeném seznamu, ve sbírkách úloh, na internetu, na portálu www.rvp.cz. Zadání má být konkrétní úlohou s tématem **aplikace aktuálního učiva matematiky**, z hlediska času potřebného k řešení **krátkodobé. Náročnost úlohy a předpokládaného řešení musí odpovídat možnostem žáků**. Žáci si spolu s učitelem ujasní zadání a očekávaný výstup, tj. prezentaci přizpůsobenou obsahu, účelu a publiku. Jsou-li požadavky na výstup a způsob hodnocení stanoveny a vysvětleny při prvním zadání, není třeba je opakovat, stane se **organizace časově nenáročnou rutinou**.

V případě potřeby je důležité informovat o mini-projektu příslušného učitele odborného předmětu a dohodnout s ním např. posouzení věcné správnosti odborné části výstupu. (Podle dohody učitelů stačí parafování odborné části textu řešení nebo přítomnost učitele příslušného předmětu při prezentaci, učitel může hodnocení zahrnout i do klasifikace žáka v příslušném předmětu). Je vhodné, když uplatnění mini-projektů je uvedeno alespoň rámcově v plánu práce školy na daný školní rok.

- **Zpracování/řešení mini-projektů**

Žáci řeší úlohu samostatně a v dohodnutém termínu. Je vhodné ověřit před termínem prezentace, zda žák má úlohu vyřešenu a prezentaci připravenou tak, aby bylo možno s tím při přípravě na hodinu počítat.

- **Prezentace výstupu mini-projektů**

Z povahy a účelu mini-projektů vyplývá i nejčastější způsob prezentace, tedy v hodinách matematiky, nejlépe v rámci učiva, k němuž se mini-projekt vztahuje. Lze však prezentaci soustředit i do vyčleněné hodiny (viz náš návrh ŠVP) a pojmout ji jako výuku aplikací nebo jako součást souhrnného opakování.

- **Hodnocení výstupu (řešení a prezentace) mini-projektů**

Co lze v mini-projektu hodnotit u jednotlivých žáků:

- náročnost úlohy
- zda obsah odpovídal zadání
- zda matematické řešení úlohy bylo správné a úplné
- jak spolehlivě a obsahově správně vybíral informace,
- zda byl obsah jeho příspěvku přiměřený účelu prezentace a zajímavě podaný

Pro hodnocení jednotlivých oblastí je vhodné připravit si bodovou tabulku (např. 1 až 5 bodů). Celkový součet bodů se převede na známku, případně lze známkovat i matematickou a odbornou část. Znamku doporučujeme využít v žakově klasifikaci z matematiky a pokud možno i v příslušném odborném předmětu.

4. Máte zájem o hlubší vhled do využívání projektů ve výuce?

Doporučujeme publikaci

(1) Žakovské projekty – cesta ke kompetencím, (CD) vydal NÚV v roce 2011 v rámci projektu Kurikulum S, ISBN 978-80-86856-97-1. Viz též <http://www.nuv.cz/projekty/metodika>.

Publikace pojednává o metodice uplatnění projektů ve výuce s řadou příkladů konkrétních projektů. Avšak není zaměřena na uplatnění zde uvedených mini-projektů, jako jednoduchých krátkodobých projektů.

5. Příklad zpracování žakovského mini-projektů – viz příloha 1

Poznámky k zpracovanému příkladu:

1. Úloha je převzata z publikace: KRIEGLSTEIN, E., a kol. Sbírka úloh z matematiky pro střední průmyslové školy a střední zemědělské technické školy. Praha: SPN 1965.

2. Variantní řešení a zobecnění nejsou nutnou součástí řešení každého mini-projektů. Záleží na povaze úlohy a řešiteli, zda bude využito i příležitosti k prezentaci variantního řešení a zobecnění.

6. Několik námětů k zadání žakovských mini-projektů – viz příloha 2.

V příloze 2 uvádíme několik námětů a úloh k zadání mini-projektů. Jsou však inspirací a návodem, jak může učitel vytvářet vlastní zadání mini-projektů.

Příloha 1

Příklad zpracování mini-projektu (příprava k prezentaci)

Zadání

Jedním tažením se zmenší průměr drátu o 10 %. Jaký průměr bude mít drát s původním průměrem 5 mm po 5 taženích?

Popište odbornou podstatu úlohy a naleznete její matematické řešení.

Řešení

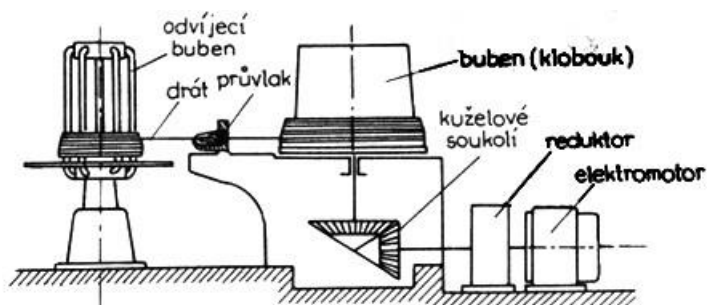
Matematické učivo: Geometrická posloupnost

Odborné učivo: Strojírenská technologie / Výroba drátů tažením

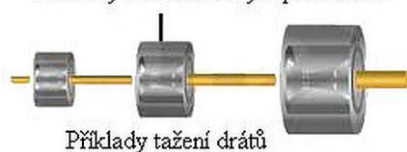
1. Úvod

Tažení drátů

Průřez drátu se zmenšuje tažením průvlaky. Činný povrch průvlaku je leštěn. Na kloboukové stolici je drát bubnem protahován průvlakem. Tažná síla je závislá na přetvárném odporu a na velikosti zmenšení průměru drátu. Tato síla nesmí být větší, než je pevnost taženého drátu, a proto je stupeň redukce omezen. K protahování se tedy obvykle používá postupného tažení v drátotazích.



Průvlaky s redukováným průměrem



2. Matematické řešení úlohy

1. varianta

Původní průměr drátud

Po 1. protažení je průměr o 10 % menší, tedy je 90 % d.

Po 1. protažení tažení 0,9 . d

Po 2. protažení 0,9 . 0,9 . d

Počet protažení n = 5

Průměr drátu d = 5 mm

Průměry drátu při tažení tvoří geometrickou posloupnost s kvocientem $q = 0,9$, $a_1 = d$. Průměr drátu po 5. tažení je v této posloupnosti šestým členem, proto

$$a_6 = a_1 \cdot q^5 = d \cdot 0,9^5$$

Dle zadání d = 5mm, tedy $a_6 = a_1 \cdot q^5 = 5 \cdot 0,9^5 = 2,95$ (po zaokrouhlení).

Po pěti taženích má drát průměr přibližně 2,95 mm.

2. varianta

Původní průměr drátud

Po 1. protažení je průměr o 10 % menší, tedy je 90 % d.

Po 1. protažení 0,9 . d

Po 2. protažení 0,9 . 0,9 . d

Počet protažení n = 5

Průměr drátu d = 5 mm

Vznikající průměry drátu během tažení tvoří geometrickou posloupnost s kvocientem $q = 0,9$, prvním členem je průměr po prvním protažení $a_1 = d \cdot 0,9$. Průměr drátu po 5. tažení je v této posloupnosti pátým členem. Proto

$$a_5 = a_1 \cdot q^4 = (0,9 \cdot d) \cdot 0,9^4 = 5 \cdot 0,9^5 = 2,95 \text{ (po zaokrouhlení).}$$

Po pěti taženích má drát průměr přibližně 2,95 mm.

3. Závěr

Z obou řešení vidíme, že označíme-li počáteční hodnotu průměru drátu $a_0 = d$, $q = 0,9$, lze zápis řešení zjednodušit:

$$a_5 = a_0 \cdot q^5$$

obecně

$$a_n = a_0 \cdot q^n$$

Podle stejného vzorce se počítá částka naspořená po n letech, kde ovšem roční úrokovou míru (p.a.) vyjádřenou desetinným číslem k 1 přičítáme, takže částky rostou.

Např. při počátečním vkladu 10 000 Kč, úrokové míře $p = 2\%$ p.a., je naspořená částka po 3 letech

$$a_3 = 10\,000 \cdot 1,02^3 = 10\,612 \text{ (po zaokrouhlení).}$$

Příloha 2

Několik námětů k zadání žákovských mini-projektů

V příloze 2 uvádíme několik úloh a námětů k zadání. Úlohy jsou různé úrovně náročnosti. Lze je přímo použít, jsou však i inspirací a návodem, jak je možno vytvářet vlastní zadání.

1. Matematické učivo: Podobnost / Planimetrie

Odborné učivo: Technická dokumentace / stavební výkresy

- Určení výměry a nákresu konkrétního bytu, dílen, učeben.

2. Matematické učivo: Podobnost / Planimetrie

Odborné učivo: Technická dokumentace / stavební výkresy

- Určení výměry konkrétního bytu, dílen, zastavěné plochy, zahrady, pozemku podle plánu, mapy nebo záznamu v katastrální mapě.

3. Matematické učivo: Funkce

Odborné učivo: Technická dokumentace

- Na základě vlastních měření sestavit tabulku a graf spotřeby elektrické energie, vody v bytě nebo vhodného zařízení. Sestavený graf prezentovat pomocí digitální techniky, popsat jeho průběh.

4. Matematické učivo: Funkce

Odborné učivo: Fyzika / Technická mechanika / Uplatnění kyvadla v technice

- Doba kyvu (matematického) kyvadla je dána vztahem funkčním vztahem $T = \pi \cdot (L/g)^{1/2}$, kde L je délka kyvadla a g tíhové zrychlení v místě kyvadla. S použitím digitální techniky sestrojte graf této funkce. Určete T pro délku kyvadla 60 cm a délku kyvadla pro $T = 1$ s.

5. Matematické učivo: Funkce

Odborné učivo: Fyzika / Technická mechanika

- Pružina se roztahuje v určitých mezích rovnoměrně se zatížením F . Při zatížení 30 N má délku 8 cm, při zatížení 70 N má délku 12 cm. Určete funkční rovnici závislosti délky pružiny na zatížení a znázorněte graficky.

6. Matematické učivo: Operace s čísly

Odborné učivo: Dějepis / Dějiny starověku a středověku

- Operace s čísly ve starověkých kulturách

7. Matematické učivo: Výroková logika

Odborné učivo: Obvody stejnosměrného proudu / relé / spínací součástky

- Modelování výrokové dvouhodnotové logiky elektrickými obvody.

8. Matematické učivo: Geometrická posloupnost/Funkce

Odborné učivo: Prognózy růstu populace / Geografie / Ekonomie

- Město má 80 000 obyvatel. Ročně přibývá 1, 5 % obyvatel. Kolik obyvatel bude mít za 4 roky?

9. Matematické učivo: Geometrická posloupnost/Funkce

Odborné učivo: Ekonomie

- Počítač ztrácí amortizací každý rok 15 % ze své ceny. Za jak dlouho klesne jeho cena na polovinu jeho původní ceny? Za jak dlouho bude možno počítač účetnický odepsat?

10. Matematické učivo: Analytická geometrie/Kuželosečky

Odborné učivo: Technická dokumentace / stavební výkresy /stavební konstrukce

- Mostní oblouk o rozpětí 48 m a výšce 8 m má tvar paraboly. Určete rovnici paraboly a polohu jejího ohniska.

11. Matematické učivo: Analytická geometrie/Kuželosečky

Odborné učivo: Technická dokumentace / nosníky

- Vodorovný ocelový nosník spočívá na dvou podporách vzdálených od sebe 2 m. Prohnutý nosník má tvar paraboly, jejíž vrchol je ve středu prohnutého nosníku. Ve vzdálenosti 0,2 m od levé podpory je průhyb nosníku 14,4 mm. Vypočtěte průhyb nosníku ve středu nosníku.

12. Matematické učivo: Stereometrie

Odborné učivo: Strojírenská technologie

- Jak dlouhý vývalek čtvercového průřezu se stranou 180 mm se vyválčuje z jehlanovitého ingotu 1,2 m dlouhého, jehož větší podstava má hranu 500 mm, menší 440 mm. Jak se změní výsledek, budeme-li uvažovat opal 2 %?

13. Matematické učivo: Stereometrie

Odborné učivo: Technická dokumentace / stavební výkresy

- Komín je vysoký 80 m. Průměr při vrcholu je 180 cm, průměr paty je 5,2 m. Vnitřní šachta je komolý kužel horního průměru 1,0 m, dolního průměru 3,0 m. Načrtněte osový řez komínem a vypočtěte jeho hmotnost, je-li hustota zdiva 1600 kg/m^3 .

14. Matematické učivo: Stereometrie

Odborné učivo: Technická dokumentace / stavební výkresy

- Vypočtěte hmotnost ocelového nosníku zadaného profilu a délky.

15. Matematické učivo: Stereometrie

Odborné učivo: Technická dokumentace / stavební výkresy

- Vypočtěte hmotnost výrobku podle výrobního výkresu (např. z praktického výcviku) a procento odpadu při jeho výrobě.

16. Matematické učivo: Planimetrie

Odborné učivo: Technická dokumentace/ Ekonomie

- Dělník má zhotovit 12 krytů, z nichž každý má tvar pravoúhlého rovnoramenného trojúhelníka s délkou ramene $a = 0,68 \text{ m}$. Kolik m^2 plechu spotřebuje a jaká bude cena materiálu na výrobu jednoho krytu, jestliže 1 m^2 plechu stojí 850,00 Kč?

17. Matematické učivo: Číselné obory

Odborné učivo: Technická dokumentace/ekonomie

- V litinové součástce se vrtají čtyři díry s průměrem 10 mm, 2 díry s průměrem 16 mm a jedna díra s průměrem 24 mm. Nakreslete součástku, aby díry byly rovnoměrně rozložené a zjistěte, jak dlouho trvá vyvrtání 320 litinových součástek, jestliže vrtání jedné díry s průměrem 10 mm trvá $t_1 = 5$ s, díry s průměrem 16 mm $t_2 = 7$ s, díry s průměrem 24 mm $t_3 = 10$ s a výměna i upnutí součástky $t_4 = 16$ s.

18. Matematické učivo: Číselné obory/ finanční matematika

Odborné učivo: Stroje/ekonomie

- Cena obráběcího stroje klesla po 6 letech používání na 64 % původní ceny. Tím se původní cena snížila o 315 000 Kč. Jaká byla cena nového stroje a kolik činila po 6 letech používání. Jaká bude cena stroje za 10 let, jestliže roční odpis činí 20 %?

19. Matematické učivo: Stereometrie

Odborné učivo: Technická dokumentace/ekonomie

- V dílně mají vyrobit 20 beden na uložení výrobků. Bedna má mít tvar krychle s vnitřní hranou $a = 0,78$ m. Určete jaký objem má jedna bedna a kolik m^2 desek je zapotřebí na výrobu 20 beden.

20. Matematické učivo: Stereometrie

Odborné učivo: technická dokumentace/ekonomie

- Jaká bude spotřeba plechu na výrobu bubny odsávacího zařízení, který má tvar pravidelného šestibokého hranolu, jestliže hrana podstavy $a = 0,5$ m a výška $v = 1,75$ m. Kolik m^2 bude potřeba na výrobu 10 bubnů?

21. Matematické učivo: Operace s čísly

Odborné učivo: Zpracování dřeva

- Pila pořeže týdně 225 krychlových metrů dřeva.
 - 1) Kolik dřeva potřebuje, aby byla celý rok vytížena?
 - 2) Kolik stromů se musí porazit, má-li strom v průměru $1,2 m^3$?
 - 3) Jak velký les by to byl, je-li na 1 a dospělého lesa průměrně 45 stromů.
 - 4) Jak dlouhý by byl ten les, jestliže jeho šířka by byla 125,5 m?
 - 5) Z klád přivezených na pilu je 12 % slabé kulatiny, která se na pile neřeže. Kolik m^3 dřeva se na pile neřeže?
 - 6) Z pořezaných klád odpadne 35 % na odřezky a řeziny. Kolik m^3 je čistého řeziva?
 - 7) Kolik vagonů by musel mít vlak, aby tyto prkna odvezl, naloží-li se na vagon 25 m^3 prken?
 - 8) Kolik m^3 pilin vznikne pořezáním všech klád, počítá-li se na ně 8 %?
 - 9) Kolik by muselo být železničních vagonů na odvoz pilin, má-li jeden vagon 45 m^3 obsahu?
 - 10) Okraje prken, na nichž je kůra se odříznou a odřezky jsou palivové dříví. Kolik bude odřezků, počítá-li se na ně 27 %?
 - 11) Kolik domácností může využít tyto odřezky na topení v zimě, počítá-li se, že protopí 15 m^3 dřeva za zimu?

22. Matematické učivo: Operace s čísly

Odborné učivo: Technická dokumentace/ Stavební výkres - náčrt

- V hotelu má být vybudována obdélníková společenská místnost s dřevěným stropem uloženým na trámech. Místnost má půdorysný rozměr 4,2 m na 6,5 m. V příčném směru bude uloženo 6 trámů o průřezu 18 cm na 20 cm s délkou uložení 20 cm. Strop je zhotoven z palubek 22 mm tlustých a 10 cm širokých.

Vypočítejte:

- 1) Délku jednoho trámu a objem všech trámů.
- 2) Obsah stropu a objem palubek.
- 3) Celkovou délku vlýsů
- 4) Hmotnost stropu ($\rho = 420 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$)

23. Matematické učivo: Stereometrie

Odborné učivo: Technická dokumentace / stavební výkresy

- Jáma pro cisternu na vodu má průměr 2,2 m a hloubku 2,1 m.
 - 1) Jaký je objem jámy?
 - 2) Za kolik je 1 m³ výkopu?
 - 3) Kolik se vejde do této cisterny vody, jestliže se dno i stěny na 10 cm vybetonují?
 - 4) Jaký je objem betonu?
 - 5) Kolik bude spotřeba písku na betonování, jestliže se na 1 m³ betonu potřebuje 1,15 m³ písku?
 - 6) Kolik bude spotřeba cementu na betonování, jestliže se na 1 m³ betonu potřebuje 250kg cementu?
 - 7) Cisterna se uvnitř omítne. Kolik m² měří tato omítka?
 - 8) Kolik litrů impregnace bude potřeba? Vhodnou impregnaci a její spotřebu vyhledej na internetu.

Použitá literatura

- (1) KRIEGELSTEIN, E., a kol. Sbírka úloh z matematiky pro střední průmyslové školy a střední zemědělské technické školy. Praha: SPN 1965.
- (2) JIRÁSEK, F., a kol.: Sbírka úloh z matematiky pro SOŠ a studijní obory SOU, 2. část. Praha: Prometheus, 2006.
- (3) MEDVEĎ, M. Aplikace matematiky ve strojírenských oborech. Praha: JČMF 1985.
- (4) CVACHOVEC, V., ŠKOPEK, R. Sbírka úloh z matematiky pro dřevařské učební obory. Praha: SPN 1988.
- (5) UČITELSTVO OKRESU LITOMYŠLSKÉHO A POLIČSKÉHO. Sbírka skupinových příkladů početních. Velké Meziříčí: Nakladatelství Aloise Šaška – knihkupectví 1932.